

Ferienkurs der TU München- -  
Experimentalphysik 4  
Wasserstoffatom, Feinstruktur und Atome im Magnetfeld  
Lösung

Jonas J. Funke

30.08.2010 - 03.09.2010

**Aufgabe 1** (Drehimpulsaddition). :

Gegeben seien zwei Drehimpulse  $J_1$  und  $J_2$  mit den Quantenzahlen  $j_1, m_{j_1}$  und  $j_2, m_{j_2}$ . Sie sollen zu einem Drehimpuls  $J = J_1 + J_2$  mit  $j, m_j$  gekoppelt werden.

- (a) Geben sie allgemein an, welche Werte  $j$  und  $m_j$  annehmen dürfen.
- (b) Welche Werte darf  $j$  annehmen, wenn  $j_1 = 2$  und  $j_2 = \frac{1}{2}$ , welche wenn  $j_1 = 2$  und  $j_2 = \frac{3}{2}$ .

**Aufgabe 2** (Kopplung von Drehimpulsen und spektroskopische Notation).

:

Vervollständigen Sie untenstehende Tabelle mit den fehlenden Werten der Quantenzahlen. Darin ist  $l$  die Drehimpulsquantenzahl,  $s$  die Spinquantenzahl,  $j$  die Gesamtdrehimpulsquantenzahl aus der Kopplung von  $S$  und  $L$ . Ergänzen sie außerdem die Symbole der Niveaus in der spektroskopischen Notation.

$l$	$s$	$j$	$m_j$	Spekt. Symbol
1	$\frac{1}{2}$			
				${}^3D_2$
			$-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	${}^2D$

**Aufgabe 3.** :

Betrachte ein Wasserstoffatom gemäss der Schroedinger-Theorie dessen Elektron sich in einem  $3d$ -Zustand befindet.

- (a) Gebe Sie an, in welche Niveaus  $nl_j$  das  $3d$ -Niveau aufspaltet, wenn man eine Spin-Bahn-Kopplung der Form  $\mathcal{H}_{LS} = a \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  beruecksichtigen. Berechnen Sie die Energieverschiebung  $\Delta E$  dieses Niveaus bezueglich des ungestoerten  $3d$ -Niveaus. Skizzieren Sie die neuen Niveaus relativ zur alten Lage. Ueberzeugen Sie sich davon, dass die Summe der Dimensionen der neuen Niveaus mit der Dimension des urspruenglichen Niveaus uebereinstimmt.

- (b) Nun wird ein konstantes Magnetfeld  $B$  eingeschaltet. Die Feinstruktur-niveaus aus Teil (a) spalten dadurch in weitere Unterniveaus auf. Wie nennt man diesen Effekt?  
Berechnen Sie den Lande-Faktor fuer die Feinstruktur-niveaus aus (a) und verwenden Sie das Ergebnis = um deren Aufspaltung durch das  $B$ -Feld zu skizzieren. Geben Sie dabei fuer jedes Unterniveau die magnetische Quantenzahl und die Dimension an.

**Aufgabe 4** (Feinstruktur des Wasserstoff). :

Das Elektron eines Wasserstoffatoms befindet sich in einem  $3d$ -Zustand.

- (a) Gehen Sie von einer Spin-Bahn-Kopplung aus. Berechnen Sie die Energien in Abhaengigkeit von  $E_3, \alpha, Z$  fuer jeden der sich ergebenden Gesamtdrehimpulse. Berechnen Sie den Abstand der entstehenden Aufspaltung.  
(b) Beruecksichtigen Sie nun zusaetzlich zu der Spin-Bahn-Kopplung noch die relativistische Korrektur. Berechnen Sie alle Werte aus Teil (a) fuer dies Naeherung.

**Aufgabe 5** (Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Wasserstoffatom). :

Im Grundzustand lautet die Wellenfunktion des Elektrons im Wasserstoffatom:

$$\psi(r) = \frac{1}{a^{3/2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r}{a}} \quad (1)$$

mit dem Bohrschen Atomradius  $a = 0.53\text{\AA}$ .

- (a) Bestimmen Sie den Radius  $r_m$ , fuer den die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons am groessten ist.  
(b) Berechnen Sie ausserdem den Erwartungswert des Abstandes zwischen dem Elektron und dem Kern  $\langle r \rangle$  im Grundzustand und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe (a).  
(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit das Elektron innerhalb bzw. ausserhalb des Bohrschen Atomradius zu finden.

**Aufgabe 6** (Aufspaltung im Magnetfeld). :

Sei  $S = 0$ . Wie nennt man den Effekt, der in einem schwachen Magnetfeld auftritt? Skizzieren Sie die Aufspaltung eines  $p$ -Niveaus und eines  $d$ -Niveaus und beschriften Sie die Unterniveaus mit den jeweiligen Werten der magnetischen Quantenzahl  $m$ .

Wie gross ist die Aufspaltung?

In wieviel Unterniveaus zerfaellt ein Niveau mit gegebenem  $l$ .

**Aufgabe 7** (Hyperfeinstruktur von Bi 209). :

- (a) Zeigen Sie, dass für den Abstand  $\Delta E(F+1) - \Delta E(F)$  zwischen benachbarten Hyperfeinstrukturniveaus gilt

$$\Delta E(F+1) - \Delta E(F) = A \cdot (f+1) \quad (2)$$

mit der Hyperfeinstrukturkonstanten  $A$  und dem Gesamtdrehimpuls  $F$ .

- (b) Bi 209 besitzt einen angeregten Zustand mit der Konfiguration  $^2D_{5/2}$ , der in 6 Hyperfeinstrukturkomponenten aufspaltet. Die Abstände zwischen diesen Energieniveaus betragen  $0.231 \text{ cm}^{-1}$ ,  $0.312 \text{ cm}^{-1}$ ,  $0.391 \text{ cm}^{-1}$ ,  $0.471 \text{ cm}^{-1}$ ,  $0.551 \text{ cm}^{-1}$ . Bestimmen Sie Kernspin  $I$ , sowie Hyperfeinstrukturkonstante  $A$  mit dem Ergebnis aus Aufgabe (a).

**Aufgabe 8** (Natrium im schwachen Magnetfeld). :

Die Wellenlängen der beiden Natrium D-Linien, die den Übergängen zwischen den Niveaus  $^2P_{1/2}$  und  $^2S_{1/2}$  (D1-Linie), sowie zwischen  $^2P_{3/2}$  und  $^2S_{1/2}$  (D2-Linie) entsprechen, betragen  $589.593 \text{ nm}$  für die D1-Linie und  $588.996 \text{ nm}$  für die D2-Linie.

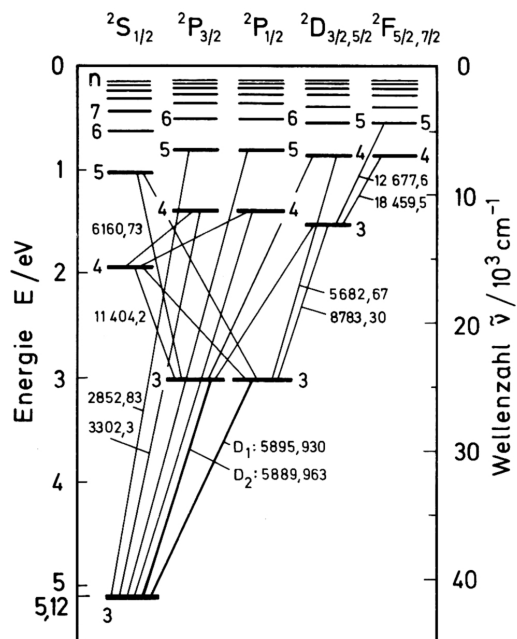


Abbildung 1: Termschema von Natrium.

- (a) Warum ist in Mehrelektronenatomen die  $l$ -Entartung der Zustände aufgehoben?
- (b) In einem schwachen Magnetfeld spalten die Niveaus auf Grund des anomalen Zeeman-Effekts auf. Berechnen Sie den jeweiligen Landé-Faktor, skizzieren Sie die Aufspaltung und beschriften Sie die einzelnen Unterniveaus mit der entsprechenden Quantenzahl. (Nicht maßstabsgetreu, aber etwaige Unterschiede/Gemeinsamkeiten in der Größe der Aufspaltung sollten qualitativ erkennbar sein.)
- (c) Bei welchem minimalen Magnetfeld würden sich die Zeeman-aufgespaltenen Komponenten der P-Zustände überschneiden, vorausgesetzt, dass die Spin-Bahn-Kopplung erhalten bliebe?
- (d) Skizzieren Sie nun die Aufspaltung der Zustände in einem Magnetfeld, das so stark ist, dass die Spin-Bahn-Kopplung aufgebrochen ist und beschriften Sie wiederum die einzelnen Unterniveaus mit der entsprechenden Quantenzahl. (Ebenfalls nicht maßstabsgetreu, aber wieder sollten Unterschiede/Gemeinsamkeiten in der Aufspaltung qualitativ erkennbar sein.)
- (e) Zeichnen Sie in das Schema aus (b) und (d) die möglichen optischen Dipolübergänge ein und charakterisieren Sie die Linien an Hand der Polarisation der emittierten Strahlung. Wie viele unterschiedliche Linien erhält man im Spektrum im schwachen/starken Magnetfeld?