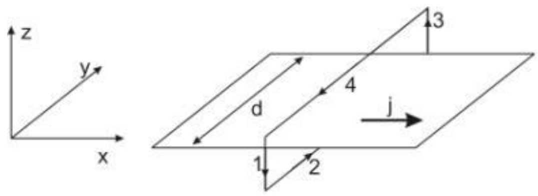
Ferienkurs Experimentalphysik 2
2010

Übung 4 - Musterlösung

1

a) Berechnung mit dem Ampèreschen Gesetz:
Mit der Rechten-Hand-Regel ermittelt man die Richtung des Magnetfeldes. Also entlang den Strecken 2 und 4 (s. Abbildung). Die Strecken 1 und 3 tragen aufgrund des Skalarproduktes nichts bei.



Es gilt also nach Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_2 B(-z)dy + \int_4 b(z)dy = b(-z) \cdot d - B(z) \cdot d = \mu_0 I \quad (1)$$

Aus Symmetrieüberlegungen folgt $|B(z)| = |B(-z)|$, die Magnetfelder aber unterschiedlich gerichtet sind. Das heißt:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2d} \quad (2)$$

Der umschlossene Strom ist in dem Fall $I = j \cdot d$. Und damit:

$$\vec{B} = -sgn(z)\frac{\mu_0 j}{2}\vec{e}_y \quad (3)$$

b) Wir verwenden wieder das Ampèresche Gesetz. Die Stromdichten sind jeweils:

$$\text{inneres Rohr:} j = \frac{I}{\pi(r_1 + d)^2 - \pi r_1^2} \quad (4)$$

$$\text{äußeres Rohr:} j = \frac{-I}{\pi(r_2 + d)^2 - \pi r_2^2} \quad (5)$$

Nochmal das Ampèresche Gesetz: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$, wobei I der vom Integrationsweg eingeschlossene Strom ist. Das Magnetfeld ist hier wieder kreisförmig um die Achse gerichtet.

$$0 \leq r < r_1 : 2\pi r B = 0 \tag{6}$$

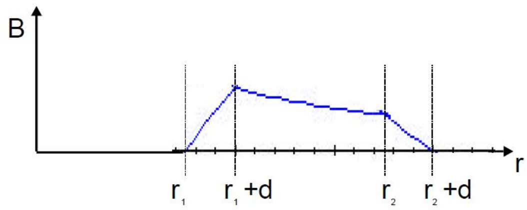
$$r_1 \leq r < r_1 + d : 2\pi r B = \mu_0 \frac{I}{\pi(r_1+d)^2 - \pi r_1^2}(\pi r^2 - \pi r_1^2) \tag{7}$$

$$r_1 + d \leq r < r_2 : 2\pi r B = \mu_0 I \tag{8}$$

$$r_2 \leq r < r_2 + d : 2\pi r B = \mu_0 I + \mu_0 \frac{-I}{\pi(r_2+d)^2 - \pi r_2^2}(\pi r^2 - \pi r_2^2) \tag{9}$$

$$r_2 + d \leq r < \infty : 2\pi r B = 0 \tag{10}$$

Aufgelöst nach B ergibt sich folgender Verlauf:



2

Die Berechnung lässt sich mithilfe des Superpostionsprinzips ausführen. Die Stromdichte im grau unterlegten Bereich ist: $\vec{j}_g = \frac{I}{\pi R^2 - \pi a^2}\vec{e}_z$. Man nimmt nun an, dass diese Stromdichte überall im Leiter (auch im weiß unterlegten Bereich) herrscht. Dieser Strom wird nun gedanklich von einem Strom im weiß unterlegten Bereich überlagert: $\vec{j}_w = -\frac{I}{\pi R^2 - \pi a^2}\vec{e}_z$. Insgesamt kompensieren sich in der inneren Röhre die beiden Ströme zu Null.
Außerdem kann man (wie in Aufgabe 1 berechnet) außerhalb eines Leiters mit kreisförmigem Durchschnitt $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$ verwenden (I=eingeschlossener Strom). Die Einheitsvektoren in $\vec{e}_\varphi$-Richtung sind natürlich für beide Leiterteile unterschiedlich:

$$\vec{e}_{\varphi,g} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\vec{e}_{\varphi,w} = \sqrt{\frac{1}{y^2 + (x-b)^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x-b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

a) Magnetfeld bei $(2R, 0, 0)$, das bedeutet $\varphi = 0$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\frac{R^2}{R^2-a^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(2R-b)}\frac{a^2}{R^2-a^2}\sqrt{\frac{1}{(2R-b)^2}}\begin{pmatrix}0\\2R-b\\0\end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\frac{R^2}{R^2-a^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(2R-b)}\frac{a^2}{R^2-a^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{14}$$

b) Magnetfeld bei $(0, 2R, 0)$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\frac{R^2}{R^2-a^2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{b^2+4R^2}}\frac{a^2}{R^2-a^2}\sqrt{\frac{1}{4R^2+b^2}}\begin{pmatrix}-2R\\-b\\0\end{pmatrix} \tag{15}$$

3

Nach Biot-Savart gilt: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{s} \times \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|^3}$.Da wir das Magnetfeld im Ursprung suchen, folgt direkt, dass die geraden Leiterstücke nichts zu diesem Feld beitragen können, da dort $(\vec{r}-\vec{r'}) \,||\, d\vec{s}$ ist und das Kreuzprodukt folglich verschwindet. Die Berechnung der Feldstärke, die durch den Halbkreis vervorgerufen wird, ist aber analog zur kreisförmigen Schleife aus der Vorlesung; wir integrieren abschließend lediglich von 0 bis π statt von 0 bis 2π. Das Feld im Ursprung beträgt also

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{4R}\vec{e}_z \tag{16}$$

4

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die positive z-Achse in die Papierebene hineinzeigt, also $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld ist gegeben durch:

$$d\vec{F} = I \cdot (d\vec{L} \times \vec{B}) \tag{17}$$

$d\vec{L}$ ist hier: $d\vec{L} = \begin{pmatrix}dx\\dy\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r \cdot \sin\varphi d\varphi\\r \cdot \cos\varphi d\varphi\\0\end{pmatrix}$

Weil das Magnetfeld nur eine z-Komonente hat, gilt:

$$dF_x = I \cdot dy \cdot B \tag{18}$$
$$dF_y = -T \cdot dx \cdot B \tag{19}$$

Um die gesamte Kraft auf den Leiter zu erhalten muss nun noch über den Leiter integriert werden. Er wird dazu über den Azimutalwinkel φ parametrisiert.

$$F_x = I \cdot B \cdot r \int_0^\pi \cos\varphi d\varphi = 0 \tag{20}$$

$$F_y = -I \cdot B \cdot r \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = -2r \cdot T \cdot B \tag{21}$$

Die Gesamtkraft auf den halbkreisförmigen Leiter ist also $\vec{F} = -2r \cdot I \cdot B\vec{e_y}$. Das entspricht genau der Kraft, die ein gerader Leiter zwischen den Enden des Halbkreises erfahren würde.

5

Die Kraft auf einen Leiter der Länge L ist gegeben durch

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B}) \tag{22}$$

Der Leiter befindet sich in dem Magnetfeld, das vom anderen Leiter im Abstand $2a$ hervorgerufen wird:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_\varphi \tag{23}$$

Die Kraft die also Leiter 2 im Magnetfeld des Leiters 1 erfährt ist:

$$\vec{F}_{21} = I_2 \cdot (\vec{L} \times \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}\vec{e}_{\varphi,1}) = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot L}{4\pi a}\vec{e}_z \times \vec{e}_{\varphi,1} = -\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot L}{4\pi a}\vec{e}_{r,1} \tag{24}$$

Pro Längeneinheit ergibt sich:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{4\pi a}\vec{e}_{r,1} \tag{25}$$

Da actio=reactio gilt, ist die Kraft die Leiter 1 im Magnetfeld des Leiters 2 erfährt, genau entgegengesetzt gleich groß:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{4\pi a}\vec{e}_{r,2} \tag{26}$$

In dem vorliegenden Fall sind die Ströme parallel, so dass die Kraft zwischen den Leitern wie berechnet anziehend ist. Bei antiparallelen Strömen ist die Kraft abstoßend.

6

Die ^6Li-Ionen sollen auf der x-Achse beschleunigt werden. Das Magnetfeld zeige in positive y-Richtung. Dann wirkt auf ein Ion mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ die Kraft:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB\vec{e}_z \tag{27}$$

Um das Ion auf der Spur zu halten, muss also ein $\vec{E}$-Feld so angelegt werden, dass das Ion in negative z-Achse abgelenkt wird. Da $q = +e$ ist $\vec{E} = E\vec{e}_z$.

Der Betrag des $\vec{E}$-Feldes lässt sich über die Kräftegleichgewichtsbedingung bestimmen:

$$qvB = qE \tag{28}$$
$$E = vB \tag{29}$$

Für die Berechnung der Geschwindigkeit des Teilchens benötigt man die Beschleunigungsspannung U_{acc}, die von dem Ion durchlaufen wird. Mit Energieerhaltung ergibt sich:

$$qU_{acc} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{30}$$
$$v = \sqrt{\frac{2qU_{acc}}{m}} = 567114m/s \tag{31}$$

Insgesamt ist also:

$$\vec{E} = 6,8 \cdot 10^5 V/m \cdot \vec{e}_z \tag{32}$$

7

Der halbe Öffnungswinkel des Kegels sei φ, so dass gilt:

$$\sin\varphi = \frac{R}{l} \tag{33}$$

Wobei l die Kantenlänge des Kegels ist.
Der Strom in einem geladenen Kreisring (Linienladungsdichte λ) mit Radius r, der mit der Geschwindigkeit ω rotiert ist gegeben durch:

$$I = \lambda \cdot r \cdot \omega \tag{34}$$

Um das gesamte magnetische Dipolmoment zu berechnen müssen wir über die infinitesimalen Dipolmomente $d\vec{p}_m = dI(r) \cdot \vec{A}(r)$ integrieren. Für dI benötigen wir den Zusammenhang zwischen λ und der gegebenen Flächenladungsdichte σ:

$$\lambda = \sigma dl \tag{35}$$
$$\tag{36}$$

Also mit Gleichung (31):

$$dI = \sigma r \omega dl = \sigma r \omega \frac{1}{\sin\varphi} dr \tag{37}$$

Ingesamt ist das magnetische Dipolmoment gegeben durch:

$$\vec{p}_m = \int d\vec{p}_m = \int_0^R \pi r^2 \sigma r \omega \frac{1}{\sin\varphi} dr = \frac{\pi\sigma\omega}{4\sin\varphi} \left[r^4\right]_0^R \tag{38}$$
$$= \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4\sin\varphi} \tag{39}$$

8

a) Der Betrag das Dipolmoments lässt sich einfach über

$$|\vec{p}_m| = I \cdot A = 1A \cdot 0,11 \cdot 0,14m^2 = 1,54 \cdot 10^{-2} Am^2 \tag{40}$$

berechnen. Da Stromrichtung und Flächennormale ein Rechtssystem bilden müssen zeigt das Dipolmoment Richtung y-z-Ebene.
Die Flächennormale $\vec{n}$ kann man über

$$\vec{n} = \vec{e}_b \times \vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\Theta \\ \sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

berechnen. Für das Dipolmoment ergibt sich also insgesamt:

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} = I \cdot A \cdot \vec{n} = 1,54 \cdot 10^{-2} Am^2 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

b) Für $\vec{B} = B\vec{e}_x$ mit $B = 1T$ ist die potentielle Energie

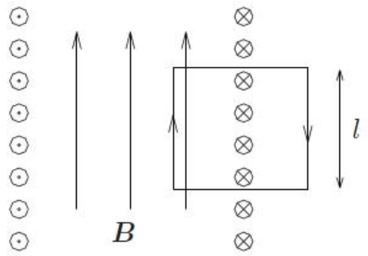
$$E_{pot} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = 1,54 \cdot 10^{-2} Am^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1Vs/m^2 = 1,33 \cdot 10^{-2} J \tag{43}$$

und das Drehmoment auf die Schleife

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = 1,54 \cdot 10^{-2} Am^2 T \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -0,77 \cdot 10^{-2} J\vec{e}_z \tag{44}$$

9

a) Durch die vereinfachenden Annahmen kann man die Krümmung der Ringspule vernachlässigenund bei der Berechnung des Feldes so tun, als handele es sich um eine gerade zylinderförmige Spule. Dann kann man eine Amperèsche Schleife so legen wie in der Abbildung gezeigt:



Das Feld hat die Form:

$$\vec{B}(\vec{r}_{innen}) = B\vec{e}_z \tag{45}$$
$$\vec{B}(\vec{r}_{außen}) = 0 \tag{46}$$

Mithilfe des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes $\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_o \int_A d\vec{A} \cdot \vec{j}$ ergibt sich dann für das Magnetfeld im Innenraum der Spule:

$$Bl = \mu_0 n l I \tag{47}$$

wobei l die Länge der Schleife und n die Anzahl der Wicklungen pro Längeneinheit ist. Also

$$B = \mu_o n I = 1,26 \cdot 10^{-6} kgm/C^2 \cdot 1000/m \cdot 0,001A = 1,26 \cdot 10^{-5} T \tag{48}$$

Im materiefreien Raum ist der Zusammenhang zwischen H und B: $H = \frac{1}{\mu_o} B$. Also ist

$$H = nI = 10A/m \tag{49}$$

b) Wenn sich der Eisenkern in der Spule befindet, dann hat H immer noch denselben Wert wie zuvor, also $H = 10A/m$. Der Zusammenhang zwischen H und B im Eisen ist nun allerdings gegeben durch

$$H = \frac{1}{\mu_0} B - M \tag{50}$$

mit der Magnetisierung M. Diese ist zunächst noch unbekannt, allerdings hat man den Zusammenhang zwischen M und H:

$$M = \chi_m H \tag{51}$$

mit der magnetischen Suszeptibilität χ_m des betrachteten Materials.

$$M = 1000A/m \tag{52}$$

und

$$B = \mu_0(H + M) = 0,0126T \tag{53}$$