1)

a) Um das elektrische Feld $\vec{E}$ zu bestimmen betrachten wir den elektrischen Fluss $\phi_{el} = \int \vec{E}\, d\vec{A}$

Als Oberflächen integral wählen wir eine Kugel.

Wegen der Symmetrie muss gelten $d\vec{A} \parallel \vec{E}$.

Wir haben gelernt, dass der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche der enthaltenen Ladung entspricht.

$$\phi_{el} = \int dV \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Im Inneren befindet sich keine Ladung

$\Rightarrow \phi_{el} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

- Außerhalb wird die Ladung $\sigma \cdot R^2 \cdot 4\pi$ eingeschlossen $\Rightarrow$ $4\pi r^2 \cdot E = \sigma \cdot R^2 \cdot 4\pi \frac{1}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$

b) Für die homogen geladene Kugel gehen wir ähnlich vor:

- Der Fluss durch eine Kugeloberfläche, die innerhalb der geladenen Kugel liegt ist:

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3} \frac{\pi}{\varepsilon_0} r^3$$

$$\Rightarrow E(r) = \rho \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} r$$

Liegt die „Integrationskugel" außerhalb der geladenen Kugel dann gilt:

$$E(r)\ 4\pi r^2 = \varrho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow E(r) = \varrho \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

c) Um den elektrischen Fluss zu berechnen denken wir uns einen Zylinder als Integrationsfläche.

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \cdot l$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{r}$$

Potential ϕ:

zu a) Annahme $\phi(r=0)=0$

$$\Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} 0, & r<R \\ \int_R \vec{E}\, d\vec{r}' = \int_R^r E(r')\, dr' = \int_R^r \frac{\sigma R^2}{r'^2}\, dr' = -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} & \text{für } r>R \end{cases}$$

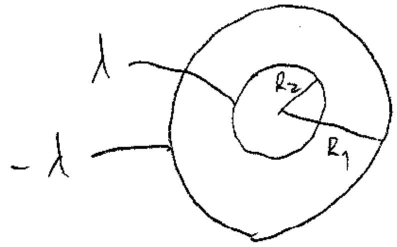
zu b) auch hier $\phi(r=0)=0$

$$\phi(r) = \begin{cases} \int_0^r \frac{\varrho}{3} r'\, dr' = \frac{\varrho}{6} r^2 & r<R \\ \frac{\varrho}{6} R^2 + \int_R^r \varrho \frac{1}{3}\frac{R^3}{r'^2}\, dr' = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\varrho}{2} R^2 - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\varrho}{3}\frac{R^3}{r} \end{cases}$$

zu c) $\phi(r) = \int^r E(r)\, dr' = \int^r \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r'}\, dr' = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi} \ln r + \text{konst.}$

2) Das Innere ($r < R_2$) & das Äußere ist feldfrei (gleiche Argumentation wie bei Aufgabe 1. → Symmetrie & Summe der Ladungen $=0$).

Um den elektr. Fluss zu berechnen wählen wir eine Zylindermantelfläche zw. R_2 & R_1:



$$E \, 2\pi r \, l = \frac{\lambda \cdot l}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r}$$

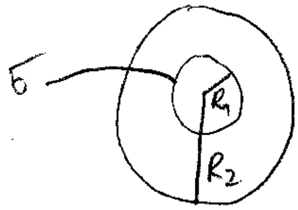
Potential für $R_2 < r < R_1$ $\quad \phi(r) = \int_{R_2}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r'} \, dr' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$

Dabei nehmen wir $\phi(R_2) = 0$ an & $\phi(R_1)$ entspricht dadurch der anliegenden Spannung U.

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \underbrace{\lambda \cdot l}_{=Q} \underbrace{\frac{1}{l} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}_{\Rightarrow \; = 1/C}$$

also: $\dfrac{C}{l} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_1/R_2)}$ //

3.) Auch hier legen wir zur Berechnung des elektr. Flusses die Kugeloberfläche zw. R_1 & R_2



$$\mathcal{E}(r)\, 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$$

$$\mathcal{E}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2}$$

Nun sei das Potential im Inneren wieder 0 & außen U.

$$\phi(r) = \int \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\, dr + \text{konst.} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{konst.}$$

für $R_1 < r < R_2$, außerhalb konstant.

$$U = \phi(R_2) - \phi(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$U = \frac{Q}{C} \rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

4

a) Jede Ladung dq die übertragen wird erhält die potentielle Energie $dq \cdot U$:

$$dW = dq \cdot U$$

$$\int dW = \int_0^Q U \cdot dq = \int_0^Q q/C \, dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$$

b) $$\mathcal{E} = \frac{U}{d} = \frac{U \cdot C}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

$$C = \varepsilon_0 A/d$$

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2 C^2}{\varepsilon_0^2 \cdot A^2}$$

Die gespeicherte Energie ist:

$$\int dV \, w_{el} = A \cdot d \cdot w_{el} = \frac{1}{2} \frac{U^2 C^2}{\varepsilon_0 A} d = \frac{1}{2} C U^2$$

5a

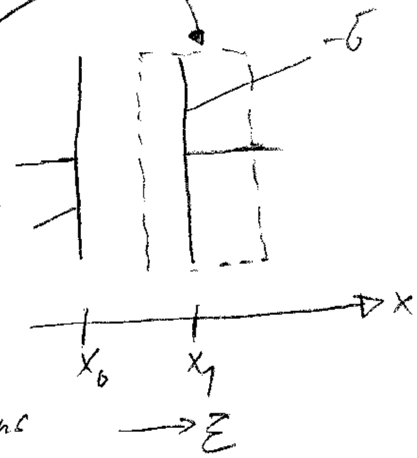
Wenn man die Spannung U anlegt, dann gilt

$$U/d = |\vec{E}|$$

Maxwell:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Wir betrachten folgendes Integrationsvolumen:



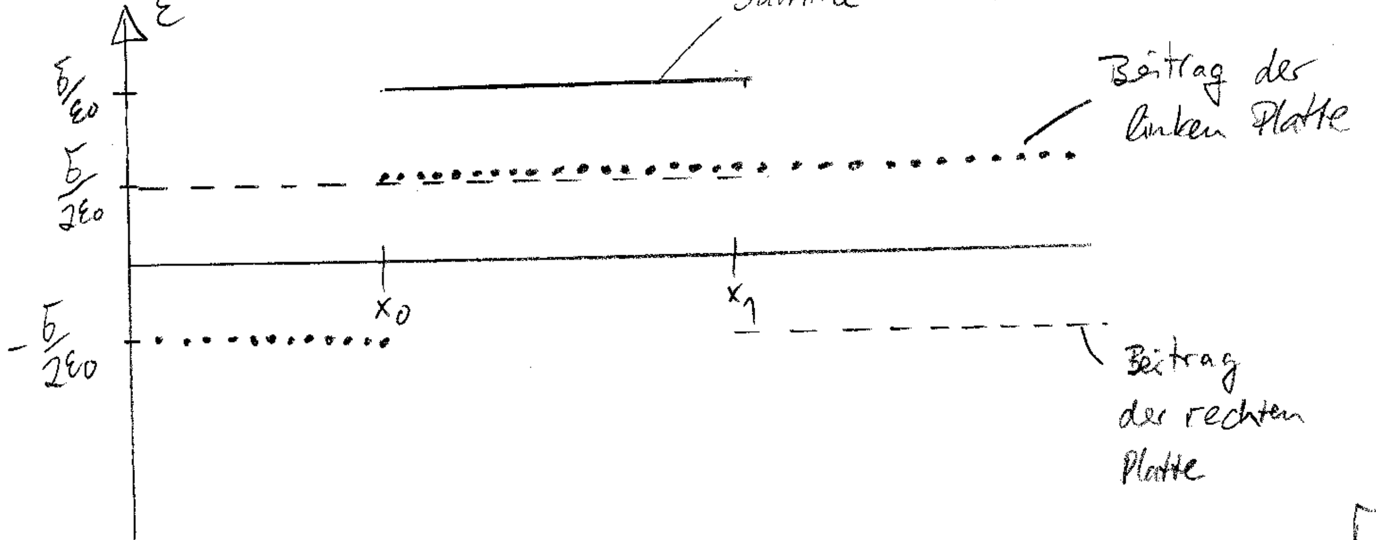
$$\int d^3r \, \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r \left(-\sigma \cdot \delta(x-x_1) + \underbrace{\sigma \cdot \delta(x-x_0)}_{\text{nicht im Integrationsbereich}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (-\sigma) \cdot A$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int d\vec{A} \, \vec{E} \overset{\text{Symmetrie}}{=} \underbrace{A(-E)}_{\text{rechte Oberfläche}} \underbrace{-(A(+E))}_{\text{linke Oberfläche}} = -2 \cdot A \cdot E$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = 2AE \rightarrow E = \sigma/2\varepsilon_0$$

D.h: Eine Platte leistet den Beitrag $\sigma/2\varepsilon_0$ zum elektr. Feld $\Rightarrow$ Feld im Inneren $= E_{ges} = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



Also gilt: $\frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot A \; \frac{1}{A} = Q \; \frac{1}{A \cdot \varepsilon_0}$

$$\Rightarrow C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d}$$

5b) Wir machen genau die gleiche Rechnung nur ausgehend von $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ statt $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ und erhalten

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \lor x > x_1 \\ \sigma = \frac{CU}{A} = \frac{\varepsilon_0 U}{d} \end{cases}$$

Daraus folgt E

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \lor x > x_1 \\ \sigma/\varepsilon_0 & \text{im Kondensator im Vakuum} \\ \sigma/\varepsilon_0 \, \frac{1}{\varepsilon} & \text{im Kondensator im Dielektrikum} \end{cases}$$

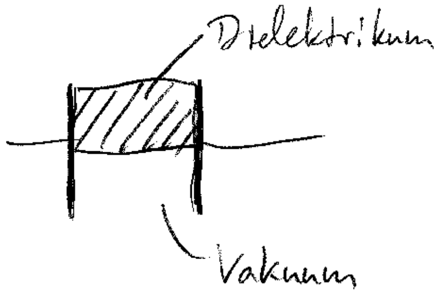
Es gilt:

$$U = \int_0^d dx \; E(x) = \underbrace{(1-x) \cdot d \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{\text{Vakuum}} + \underbrace{x \cdot d \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}}_{\text{Dielektrikum}}$$

$$= \underbrace{\sigma \cdot A}_{Q} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{A} \cdot \frac{d}{\varepsilon_0} \left[(1-x) + \frac{x}{\varepsilon} \right] \right)}_{= 1/C}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \left(\frac{1}{1-x+x/\varepsilon} \right) \underset{\text{voll ausgefüllt}}{\overset{x \to 1}{=}} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d} = \varepsilon \cdot C_{\text{Vakuum}}$$

5c) Für diesen Fall ist die Flächenladungsdichte σ nicht konstant. An der Stelle des Dielektrikums muss sie höher sein, damit $\underbrace{E_{diel}}_{\text{Feld im Kondensator im Dielektrikum (oben)}} = \underbrace{E_{Vak}}_{\text{Feld im Kondensator, wo kein Dielektrikum ist (unten)}}$



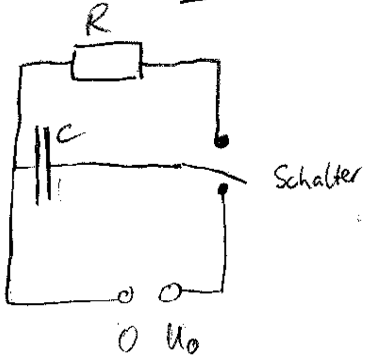
Wir können es als eine Parallelschaltung von einem vollständig gefüllten Kondensator $\left(C = A \cdot y \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}{d}\right)$ und einen Kondensator zwischen dessen Platten nur Vakuum ist ansehen $\left(C = A(1-y) \frac{\varepsilon_0}{d}\right)$

$$\Rightarrow C = A \cdot y \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} + A(1-y) \frac{\varepsilon_0}{d}$$

$$= \frac{A}{d} \cdot \varepsilon_0 \left(\underbrace{y\varepsilon - y}_{>1} + 1 \right)$$

6) Aufgabe 6 ist zu lang für eine Übungsaufgabe, deswegen lassen wir sie weg.

7)



$$U C = Q$$

$$I = U/R = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} C = \frac{dQ}{dt} = -I = -U/R$$

$$\Rightarrow \quad \dot{U} = -\frac{U}{R \cdot C} \underset{\uparrow}{=} - U(t) \frac{1}{\tau}$$

$$\tau := R \cdot C$$

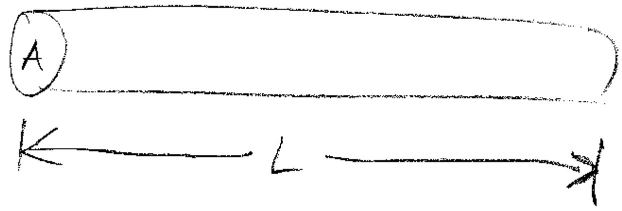
Ansatz: $U(t) = U_0 \quad e^{-t/\tau}$

$$\dot{U} = -\frac{U_0}{\tau} \cdot U(t)$$

passt.

$$I = U/R = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

8)



$$R = \rho \cdot \frac{A}{L}$$

9)

Innenwiderstand: Für $I = 150\,A$ fallen $2\,V$ am Innenwiderstand ab $\Rightarrow$ $R_I = \frac{2V}{150A} \doteq 13\,m\Omega$

analog $R_A = \frac{10V}{150A} \doteq 67\,m\Omega$