

**Thermodynamische Hauptsätze,
Kreisprozesse
Übung**

Marcus Jung

14.09.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Thermodynamische Hauptsätze	3
1.1	Aufgabe 1:	3
1.2	Aufgabe 2:	3
1.3	Aufgabe 3:	3
1.4	Aufgabe 4:	3
1.5	Aufgabe 5:	4
1.6	Aufgabe 6:	4
1.7	Aufgabe 7:	4
1.8	Aufgabe 8:	5
1.9	Aufgabe 9:	5
2	Kreisprozesse	6
2.1	Aufgabe 1:	6
2.2	Aufgabe 2:	6
2.3	Aufgabe 3:	7
2.4	Aufgabe 4:	8
2.5	Aufgabe 5:	8

1 Thermodynamische Hauptsätze

1.1 Aufgabe 1:

Für ein ideales Gas ist $U = \frac{3}{2}NkT$, für $T = const$ folgt $\Delta U_{12} = 0$ und damit aus dem 1. Hauptsatz:

$$0 = \Delta Q_{12} + \Delta W_{12} \rightarrow \Delta Q_{12} = -\Delta W_{12}$$

$$\text{mit } pV = NkT = const. \rightarrow \Delta W_{12} = -\int_1^2 pdV = -NkT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$$

$$-NkT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -NkT \ln(e) = -NkT \rightarrow \Delta Q_{12} = NkT$$

1.2 Aufgabe 2:

Betrachte reversible Zustandsänderung entlang $V = V_0 * \left(\frac{T}{T_0}\right)^b$. Der thermische Ausdehnungskoeffizient ist damit

$$\alpha = \frac{1}{V} * \left(\frac{dV}{dT}\right) = \frac{1}{V} * V * b * \frac{1}{T} = \frac{b}{T}$$

Die Arbeit, die das Gas verrichtet, bei Temperaturerhöhung $\Delta T = T_2 - T_1$:

$$\Delta W_{12} = -\int_1^2 pdV = -\int_1^2 \frac{NkT}{V} dV = -\int_1^2 NkT \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} dT =$$

$$-\int_1^2 NkT \alpha dT = -\int_{T_1}^{T_2} Nkb dT = -Nkb \Delta T < 0$$

1.3 Aufgabe 3:

$$T_m = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} = 40^\circ C$$

$$dS_j = c_j \frac{dT}{T} \quad j = 1, 2$$

$$\Delta S = c_1 \int_{T_1}^{T_m} \frac{dT}{T} + c_2 \int_{T_2}^{T_m} \frac{dT}{T} =$$

$$c_1 * \ln\left(\frac{T_m}{T_1}\right) + c_2 * \ln\left(\frac{T_m}{T_2}\right) = 745,64 \frac{J}{K}$$

1.4 Aufgabe 4:

- $pV = NkT$

$$\Delta Q = \Delta W = 0 \rightarrow \Delta U = 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}NkT + \frac{3}{2} \frac{N}{2} k 2T = \frac{3}{2} \frac{3N}{2} k T_f \rightarrow T_{f(irr)} = \frac{4}{3}T$$

$$p_f * 2V = \frac{3}{2}Nk \frac{4}{3}T \rightarrow p_f = p = \frac{NkT}{V}$$

$$S(T, V, N) = Nk \left[\frac{3}{2} \ln(T) + \ln\left(\frac{V}{N}\right) + const. \right]$$

$$\Delta S = S\left(\frac{4}{3}T, 2V, \frac{3N}{2}\right) - S(T, V, N) - S\left(2T, V, \frac{N}{2}\right) =$$

$$\frac{3}{2}Nk \left[\frac{3}{2} \ln\left(\frac{4}{3}T\right) + \ln\left(\frac{4V}{3N}\right) + const. \right] = \frac{5}{4}Nk \ln\left(\frac{32}{27}\right) = 0,214Nk > 0$$

- $\Delta S = 0 \rightarrow S\left(T_f, 2V, \frac{3N}{2}\right) = S(T, V, N) + S\left(2T, V, \frac{N}{2}\right) =$
 $\frac{9}{4} \ln(T_f) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{4V}{3N}\right) = \frac{3}{2} \ln(T) + \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{4} \ln(2T) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2V}{N}\right)$

$$\rightarrow T_{f(rev)} = 1,213T < T_{f(irr)}$$

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 0 - \Delta W$$

$$\Delta W = \frac{3}{2}NkT + \frac{3}{2} \frac{N}{2} k 2T - \frac{3}{2} \frac{3N}{2} k T_f = Nk(3T - \frac{9}{4}T_f) = 0,2702NkT$$

1.5 Aufgabe 5:

$$p = \frac{NkT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \quad \text{allg. Zusammenhang: } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T * \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T * \left(\frac{Nk}{V-b}\right) - \frac{NkT}{V-b} + \frac{a}{V^2} = \frac{a}{V^2}$$

$$\rightarrow U = -\frac{a}{V} + \text{const}(T), \quad \text{mit } U_{id} = \frac{3}{2}NkT \rightarrow \lim_{V \rightarrow \infty} \text{const}(T) = \frac{3}{2}NkT$$

1.6 Aufgabe 6:

Die aussage lässt sich leicht an einem Beispiel beweisen: Man betrachtet ein von der Außenwelt in jeder Weise isoliertes System, das aus zwei Systemen a und b, die im thermischen Kontakt stehen (nicht aber im thermischen Gleichgewicht), besteht und die zeitunabhängigen Temperaturen T_a und T_b haben. Gemäß der Wärmeleitungsgleichung fließt ein Wärmestrom δQ_b in System b und δQ_a in System a.

Nach dem ersten Hauptsatz muss gelten: $\delta Q_b = -\delta Q_a$. Gemäß der Entropiedefinition gilt für die Entropieströme: $\delta S_{a,b} = \frac{\delta Q_{a,b}}{T_{a,b}}$. Mithilfe des ersten Hauptsatzes lässt sich nun für die Entropieänderung des Gesamtsystems schreiben: $\delta S = \delta Q_a \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}\right) = \delta Q_a * \left(\frac{T_b - T_a}{T_a T_b}\right)$. Jetzt passiert das Entscheidende: $\delta S \geq 0$ gemäß dem zweiten Hauptsatz, also ist entweder $T_b > T_a$ und $\delta Q_a \geq 0$ oder $T_a > T_b$ und $\delta Q_b \geq 0$

Dieses Beispiel hat insofern allgemeine Gültigkeit, dass jeder Wärmefluss aufgrund einer Temperaturdifferenz in Teilsysteme der obigen Gestalt zerlegt werden kann. Mit der Extensivität der Entropie folgt dann, dass aus der Entropieformulierung des zweiten Hauptsatzes der ursprüngliche Satz folgt: Wärme fließt in einem von selbst ablaufenden Vorgang immer vom wärmeren zum kälteren System.

1.7 Aufgabe 7:

- Bei konstantem Volumen verrichtet das System keine Kraft entlang eines Weges, also $\Delta W = 0$.

$$\text{Damit lautet der erste Hauptsatz: } dU = \delta Q = C_V dT$$

Der Gleichverteilungssatz besagt aber für ein ideales Gas mit N Teilchen:

$$U = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} n R T \rightarrow \frac{dU}{dT} = \frac{f}{2} n R \rightarrow dU = \frac{f}{2} n R dT$$

Setzt man dies nun in den ersten Hauptsatz ein, erhält man als Ergebnis für die molare Wärmekapazität eines idealen Gases bei konstantem Volumen

$$c_V = \frac{f}{2} R$$

- Bei konstantem Druck lautet der erste Hauptsatz (nun bereits unter Verwendung des Gleichverteilungssatzes):

$$dU = \delta Q - \delta W \rightarrow \frac{f}{2} n R dT = C_p dT - p dV \rightarrow \frac{f}{2} n R dT = C_p dT - \frac{nR}{p} p dT$$

$$n * \left(\frac{f}{2} R + R\right) = C_p \rightarrow c_p = c_V + R$$

Im zweiten Schritt wurde die ideale Gasgleichung verwendet, um dV zu ersetzen. Die isobare, molare Wärmekapazität ist also gerade um die universelle Gaskonstante R größer als diejenige bei konstantem Volumen, weil zusätzliche Energie aufgewendet wird, um die Volumenausdehnung zu bewerkstelligen.

1 Thermodynamische Hauptsätze

- Wenn $\delta Q = 0$, eine Zustandsänderung, also adiabatisch ist, lautet der erste Hauptsatz für eine infinitesimale Expansion:

$$dU = C_V dT = -\delta W = -pdV$$

Mit der idealen Gasgleichung lässt sich $p = \frac{nRT}{V}$ ersetzen und man weiß jetzt,

$c_V = \frac{f}{2}R$. Damit nimmt der erste Hauptsatz nun folgende Form an:

$$\frac{f}{2} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} \rightarrow \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{f}{2}} = -\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-1}$$

wobei die Konstanten T_0 und V_0 über das Integrieren auf beiden Seiten als Integrationskonstante gemäß der Rechenregel in den Logarithmus gelangt sind.

Schreibt man nun beide Seiten der Gleichung in den Exponenten der Exponentialfunktion, erhält man eine erste Variante des Adiabatengesetzes für ideale Gase:

$$T^{\frac{f}{2}} * V = T_0^{\frac{f}{2}} V_0 = \text{const.}$$

Wiederum mit der Gasgleichung ersetzt man $T = \frac{pV}{nR}$ und stellt das gewohnte Adiabatengesetz mit $c_p = c_V + R$ und $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ auf:

$$\begin{aligned} \frac{p^{\frac{f}{2}} V^{\frac{f}{2}+1}}{nR} &= \text{const.} \rightarrow p * V^{\frac{\frac{f}{2}+1}{\frac{f}{2}}} = \text{const.} \\ &\rightarrow p * V^\gamma = \text{const.} \end{aligned}$$

1.8 Aufgabe 8:

Für eine reversible Zustandsänderung lautet der erste Hauptsatz:

$$dU = TdS - pdV$$

für $dN = 0$ Mit den Zustandsgleichungen

$$U = \frac{3}{2}NkT, \quad pV = NkT$$

für ein ideales Gas kann man den ersten Hauptsatz nach dS auflösen:

$$dS = \frac{3}{2}Nk \frac{dT}{T} + Nk \frac{dV}{V}$$

Ausgehend von einem Zustand T_0, V_0 mit der Entropie S_0 kann man diese Gleichung integrieren:

$$S(T, V) - S_0(T_0, V_0) = \frac{3}{2}Nk \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + Nk \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = Nk \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{V}{V_0}\right)\right]$$

und wenn man für $V = \frac{T}{p}$ substituiert:

$$S(T, p) - S_0(T_0, p_0) = Nk \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{p_0}{p}\right)\right]$$

Die Entropie eines idealen Gases nimmt also mit der Temperatur und Volumen zu.

1.9 Aufgabe 9:

- $T_m = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} = 73^\circ C$

$$dS_j = c_j \frac{dT}{T} \quad j = 1, 2$$

$$\Delta S = c_1 \int_{T_1}^{T_m} \frac{dT}{T} + c_2 \int_{T_2}^{T_m} \frac{dT}{T} =$$

$$c_1 * \ln\left(\frac{T_m}{T_1}\right) + c_2 * \ln\left(\frac{T_m}{T_2}\right) = 5,64 \frac{J}{K}$$

- Was der Student nicht beachtet hat, ist das dies ein irreversibler Prozess ist und dadurch natürlich auch noch zusätzlich Entropie entsteht!

2 Kreisprozesse

2.1 Aufgabe 1:

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{|\Delta W_{out}|}{\Delta Q_{in}} = \frac{\Delta Q_{in} - |\Delta Q_{out}|}{\Delta Q_{in}} = 1 - \frac{|\Delta Q_{out}|}{|\Delta Q_{in}|}$

Es gilt: $p_a V_a = NkT_a$, $p_a V_b = NkT_b \rightarrow T_b = \frac{V_b}{V_a} T_a = 2T_a$

- $a \rightarrow b$: isobare Expansion:

$$\Delta Q_{ab} = C_p(T_b - T_a) = C_p T_a > 0$$

$$\Delta W_{ab} = - \int_a^b p dV = -p_a(V_b - V_a) = -p_a V_a = -NkT_a < 0$$

Das System verrichtet also Arbeit.

- $b \rightarrow c$: isochore Abkühlung:

$$dV = 0 \rightarrow \Delta W_{bc} = 0$$

$$\Delta Q_{bc} = \Delta U_{bc} = C_V(T_c - T_b) = -C_V T_a < 0$$

- $c \rightarrow a$: isotherme Kompression:

$$\Delta W_{ca} = - \int_c^a p dV = -NkT_a \int_{V_b}^{V_a} \frac{dV}{V} = -NkT_a \ln\left(\frac{V_a}{2V_a}\right) = NkT \ln(2) > 0$$

$$T = const. \rightarrow \Delta U_{ca} = 0 \rightarrow \Delta Q_{ca} = -\Delta W_{ca} = -NkT_a \ln(2) < 0$$

$$\eta = \frac{-(-NkT_a + NkT_a \ln(2))}{C_p T_a} = \frac{2}{5}(1 - \ln(2)) = 0,123$$

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{tief}}{T_{hoch}} = 0,5 \rightarrow \eta = \frac{1}{4} \eta_{carnot}$$

2.2 Aufgabe 2:

$$r = \frac{V_1}{V_2}, \quad r_c = \frac{V_3}{V_2}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

- $1 \rightarrow 2$: adiabatische Kompression:

$$\Delta Q_{12} = 0 \rightarrow \Delta W_{12} = \Delta U_{12} = C_V(T_2 - T_1) > 0$$

- $2 \rightarrow 3$: isobare Expansion:

$$\Delta Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) > 0$$

$$\Delta W_{23} = -p_2(V_3 - V_2)$$

- $3 \rightarrow 4$: adiabatische Expansion:

$$\Delta Q_{34} = 0$$

$$\Delta W_{34} = \Delta U_{34} = C_V(T_4 - T_3) < 0$$

- $4 \rightarrow 1$: isochore Abkühlung:

$$\Delta W_{41} = 0$$

$$\Delta Q_{41} = \Delta U_{41} = C_V(T_1 - T_4) < 0$$

2 Kreisprozesse

$$\eta_{Diesel} = \frac{C_V(T_2-T_1) - Nk(T_3-T_2) + C_V(T_4-T_3)}{C_p(T_3-T_2)} = \frac{C_p(T_3-T_2) - C_V(T_4-T_1)}{C_p(T_3-T_2)} = 1 - \frac{C_V}{C_p} \frac{T_4-T_1}{T_3-T_2} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}$$

Verwende: $0 = \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} =$

$$\int_2^3 \frac{C_p dT}{T} + \int_4^1 \frac{C_V dT}{T} = C_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + C_V \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^\gamma = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^\gamma =$$

$$\rightarrow \eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_1}{T_2} \frac{T_4^{-1}}{T_3^{-1}} =$$

$$1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_1}{T_2} \frac{r^{\gamma-1}}{r_c^{-1}}$$

Verwende nun die Adiabatangleichung:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = r^{-(\gamma-1)}$$

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{1}{r^{\gamma-1}} \frac{r_c^\gamma - 1}{r_c - 1}$$

2.3 Aufgabe 3:

$$r = \frac{V_1}{V_2}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

- 1 → 2: adiabatische Kompression:
 $\Delta Q_{12} = 0 \rightarrow \Delta W_{12} = \Delta U_{12} = C_V(T_2 - T_1) > 0$
- 2 → 3: isochore Erwahrung:
 $\Delta W_{23} = 0$
 $\Delta Q_{23} = \Delta U_{23} = C_V(T_3 - T_2) > 0$
- 3 → 4: adiabatische Expansion:
 $\Delta Q_{34} = 0$
 $\Delta W_{34} = \Delta U_{34} = C_V(T_4 - T_3) < 0$
- 4 → 1: isochore Abkuhlung:
 $\Delta W_{41} = 0$
 $\Delta Q_{41} = \Delta U_{41} = C_V(T_1 - T_4) < 0$

$$\rightarrow \eta_{Otto} = 1 - \frac{|C_V(T_1-T_4)|}{C_V(T_3-T_2)} = 1 - \frac{T_4-T_1}{T_3-T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{T_4^{-1}}{T_3^{-1}}$$

Benutze Adiabatangleichung:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = r^{-(\gamma-1)}$$

Außerdem gilt:

$$0 = \Delta S = \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} =$$

$$\int_{T_2}^{T_3} \frac{C_V dT}{T} + \int_{T_4}^{T_1} \frac{C_V dT}{T} = C_V (\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right)) = 0$$

$$\rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1} \rightarrow \eta_{Otto} = 1 - r^{-(\gamma-1)}$$

2 Kreisprozesse

Prinzipiell hat der Otto-Prozess einen höheren Wirkungsgrad. Da man aber technisch beim Diesel-Prozess eine höhere Verdichtung erreichen kann ca. 1:18 im Vergleich zu ca. 1:12) hat der Diesel-Prozess technisch gesehen den höheren Wirkungsgrad.

2.4 Aufgabe 4:

- $c \rightarrow a$: isotherme Expansion:

$$\Delta W_{12} = - \int_1^2 p dV = -NkT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -NkT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0$$

$$T = \text{const.} \rightarrow \Delta U_{12} = 0 \rightarrow \Delta Q_{12} = -\Delta W_{12} = NkT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$$

- $2 \rightarrow 3$: isochore Abkühlung:

$$\Delta W_{23} = 0$$

$$\Delta Q_{23} = \Delta U_{23} = C_V(T_2 - T_1) < 0$$

- $3 \rightarrow 4$: isotherme Kompression:

$$\Delta W_{34} = - \int_3^4 p dV = -NkT_2 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = -NkT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) > 0$$

$$T = \text{const.} \rightarrow \Delta U_{34} = 0 \rightarrow \Delta Q_{34} = -\Delta W_{34} = -NkT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) < 0$$

- $4 \rightarrow 1$: isochore Erwärmung:

$$\Delta W_{41} = 0$$

$$\Delta Q_{41} = \Delta U_{41} = C_V(T_1 - T_2) > 0$$

$$\eta_{St.} = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_{12} + \Delta Q_{41}} = \frac{(T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{\frac{3}{2}(T_1 - T_2) + T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Falls die abgegebene Wärme $-\Delta Q_{23} > 0$ in Schritt $4 \rightarrow 1$ wieder vollständig eingespeist werden kann, erhält man:

$$\eta_{St.} = \frac{(T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_{carnot}$$

2.5 Aufgabe 5:

Da der Carnotprozess ein Kreisprozess ist, gilt $\Delta U = 0$ nach einem Umlauf. Dies führt mit dem ersten Hauptsatz zu:

$$\Delta U = 0 = Q_{ein} + Q_{aus} - W_{ges}$$

Also reicht es, Q_{ein} und Q_{aus} zu berechnen, um die Leistungsziffern zu ermitteln. Es gilt mit dem zweiten Hauptsatz und der Tatsache, dass die Wärme im T-S-Diagramm die Fläche unter der Kurve ist:

$$Q_{aus} = \int_{S_h}^{S_k} T dS = T_h(S_k - S_h)$$

$$Q_{ein} = \int_{S_k}^{S_h} T dS = T_k(S_h - S_k)$$

2 Kreisprozesse

$$\rightarrow W_{ges} = (T_k - T_h)(S_h - S_k)$$

Daran, dass $W_{ges} < 0$ sieht man, dass beim linksläufigen Carnotprozess netto Arbeit verrichtet werden muss.

Mit der Definition der Leistungsziffern und den angegebenen Temperaturen erhält man:

$$\epsilon = \frac{Q_{aus}}{W_{ges}} = \frac{T_h}{T_h - T_k} = 9,9$$

$$\epsilon_0 = \frac{Q_{ein}}{W_{ges}} = \frac{T_k}{T_h - T_k} = 19,9$$