Lösung zu Kapitel 5 und 6

(1) Sei f eine total differenzierbare Funktion. Welche Aussagen sind richtig?
☐ f ist partiell differenzierbar
☐ f kann stetig partiell differenzierbar sein
☐ f ist dann immer stetig partiell differenzierbar
☐ f ist stetig
☐ f ist nicht stetig
Sei nun f nicht total differenzierbar. Welche Aussagen sind richtig?
☐ f ist stetig partiell differenzierbar
☐ f ist nicht stetig partiell differenzierbar
Sei nun f nicht stetig. Welche Aussagen sind richtig?
☐ f ist total differenzierbar
☐ f ist nicht total differenzierbar
☐ keine Aussage

Loesung

Sei f eine total differenzierbare Funktion. Welche Aussagen sind richtig?
☒ f ist partiell differenzierbar
☒ f kann stetig partiell differenzierbar sein
☐ f ist dann immer stetig partiell differenzierbar
☒ f ist stetig
☐ f ist nicht stetig
Sei nun f nicht total differenzierbar. Welche Aussagen sind richtig?
☐ f ist stetig partiell differenzierbar
☒ f ist nicht stetig partiell differenzierbar
Sei nun f nicht stetig. Welche Aussagen sind richtig?
☐ f ist total differenzierbar
☒ f ist nicht total differenzierbar
☐ keine Aussage

(2) Gegeben ist die Funktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ist die Funktion stetig? Ist sie partiell Differenzierbar?

Loesung

Fr $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Funktion als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Da

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})\right| \leq \left|x^2+y^2\right| \underbrace{\leq}_{x^2+y^2\leq 1} 1\ \sqrt{x^2+y^2}$$

ist sie auch bei $(0, 0)$ stetig.
Fr $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Funktion partiell Differenzierbar und in $(0, 0)$ gilt:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin(\frac{1}{h^2}) = 0$$

Analog gilt dies fr $f_y(0, 0) = 0$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

Berechne $\partial_1 f(x, y)$ und $\partial_1 f(0, 0)$. Zeige, dass $\partial_1 f(x, y)$ am Ursprung stetig ist.

Loesung

Zunaechst bilden wir Ableitungen und erhalten:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y\ (x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} \tag{2}$$

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0\ \frac{h}{h} = 0 \tag{3}$$

Nun zeigen wir die Lipschitz-Stetigkeit bei $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} |\partial_x f(x,y) - \partial_x f(0,0)| &= \left|\frac{y\ (x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right| \\ &\leq \left|y\ \frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|y\ \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \\ &\leq 2\ |y| = 2\sqrt{y^2} \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned} \tag{4}$$

also gilt:

$$|\partial_x f(x,y) - \partial_x f(0,0)| \leq 2\ \left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\| \tag{5}$$

(4) Gegeben ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{6x^{-2}y^3}{2x^4+6y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{6}$$

Ist f stetig? Begruendung.
Loesung
Fuer $(x,y) \neq 0$ ist f als komposition stetiger Funktionen wieder stetig. Fuer $(0,0)$ waehle man z.B. $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$ und zeige so:

$$f(x_n, y_n) = -6\frac{n^2\,\frac{1}{n^6}}{2\frac{1}{n^4} + 6\frac{1}{n^4}} = -6\frac{1}{2+6} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{3}{4} \neq 0 \tag{7}$$

Da wir Nullfolgen gefunden haben, fuer die der Grenzwert nicht 0 ist, ist f nicht stetig in $(0,0)$

(5) Gegeben ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{8}$$

(a): Uberpruefe, ob f in $\mathbb{R}^2$ stetig ist? (Hinweis: Polarkoordinaten)
(b): Berechne

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \qquad \text{und} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \tag{9}$$

Ist f differenzierbar?
(c): Berechne die stetige Fortsetzung, falls sie existiert.
Loesung

(a): Uberpruefe, ob f in $\mathbb{R}^2$ stetig ist?
Fuer $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.
Mit $x = r\cos(\phi)$ und $y = r\sin(\phi)$ folgt fuer $(x,y) = (0,0)$:

$$f(x,y) = \tilde{f}(r,\phi) = \begin{cases} \frac{e^{r^2-1}}{r^2} & r \neq 0 \\ 0 & r = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Mit

$$\lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2-1}}{r^2} = \infty \neq 0 = f(0,0) \Rightarrow \text{ nicht stetig} \tag{11}$$

(b): Berechne

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{h^2-1}}{h^2} - 0}{h} = \infty \tag{12}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \infty \tag{13}$$

Nicht differenzierbar, weil die Limiten nicht existieren.
(c): Berechne die stetige Fortsetzung, falls sie existiert.
Da f nicht stetig ist, kann sie nicht stetig fortgesetzt werden.

(6) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{14}$$

(a): Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist.
(b): Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(0,0)$ und $\partial_2 f(0,0)$.
(c): Ist f total differenzierbar?
Loesung

(a): Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist.
Mit $x_n = \frac{1}{n^3}$ und $y_n = \frac{1}{n}$ folgt:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^3}\,\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \neq 0 \tag{15}$$

Also ist f nicht stetig.
(b): Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(0,0)$ und $\partial_2 f(0,0)$.

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}\,0 - 0}{h} = 0 \tag{16}$$

Analog findet man $\partial_2 f(0,0) = 0$
(c): Ist f total differenzierbar?
Da f nicht stetig ist, ist f auch nicht total differenzierbar.

(7) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{17}$$

(a): Fuer den Punkt $P = (0,0)$ und den Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $|\mathbf{v}| = 1$ berechne man die Richtungsableitung in P (Achtung, ist f stetig?) und $\partial_x f(0,0)$, $\partial_y f(0,0)$.
(b): Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.
Loesung

(a): Fuer den Punkt $P = (0,0)$ und den Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $|\mathbf{v}| = 1$ berechne man die Richtungsableitung in P (Achtung, ist f stetig?) und $\partial_x f(0,0)$, $\partial_y f(0,0)$.

Wir berechnen die Richtungsableitung mit der Definition:

(18)
$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} v\frac{f(\mathbf{0}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{0})}{h}\\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{h^2v_1^2\, hv_2}{t^2v_1^2+h^2v_2^2}-0\right)\\ &= \frac{v_1^2\, v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_1^2\, v_2\end{aligned}$$

Fuer $\partial_x f(0,0)$ setzt man $\mathbf{v} = (1,0)^t$ und fuer $\partial_y f(0,0)$ setzt man $\mathbf{v} = (0,1)^T$ und erhaelt:

(19)
$$\partial_x f(0,0) = 0 \quad \partial_y f(0,0) = 0$$

(b): Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.
Nach Definition ist f total differenzierbar in $\mathbf{0}$, wenn gilt:

(20)
$$\lim_{h_1,h_2\to 0,0} \frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{h})-f(\mathbf{0})-A(h_1,h_2)}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

mit $A = \mathrm{grad} f(0,0)$ fuer Skalarfelder.
Wir waehle $h_1 = h_2 = h$ und mit $\mathrm{grad} f(0,0) = (0,0)^T$ folgt:

(21)
$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+h^2}-0}{\sqrt{h^2+h^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{h}{|h|} \neq 0$$

Also ist f nicht total differenzierbar.

(8) Gegeben ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(22)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^6+4y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

(a): Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{v} \neq 0$. Wie lautet die Richtungsableitung $\partial_{\mathbf{v}} f(0,0)$ von f am Ursprung?
(b): Zeigen Sie, dass f im Ursprung unstetig ist.
(c): Ist f im Ursprung partiell differenzierbar?
(d): Ist f im Ursprung total differenzierbar?

Loesung

(a): Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{v} \neq 0$. Wie lautet die Richtungsableitung $\partial_{\mathbf{v}} f(0,0)$ von f am Ursprung?

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^5 v_1^3 v_2^2}{h^4(h^2 v_1^6 + 4v_2^4)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{v_1^3 v_2^2}{h^2 v_1^6 + 4v_2^4} \\
&= \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^3}{4v_2^2} & v_2 \neq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{23}$$

(b): Zeigen Sie, dass f im Ursprung unstetig ist.
Man waehle $y = x^{\frac{3}{2}}$:

$$f(x, x^{\frac{3}{2}}) = \frac{x^3 x^3}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \tag{24}$$

(c): Ist f im Ursprung partiell differenzierbar?
Da die partiellen Ableitungen existieren, ist f partiell differenzierbar.
Mit $\mathbf{v} = (1,0)^T$, erhaelt man $\partial_x f(0,0) = 0$ und mit $\mathbf{v} = (0,1)^T$ $\partial_y f(0,0) = 0$.

(d): Ist f im Ursprung total differenzierbar?
Da f nicht stetig ist, ist f auch nicht total differenzierbar.

(9) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x)\ \sin(y)}{xy} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{25}$$

(a): Wieso ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig? (Hinweis: Taylorreihe von $\sin(\ldots)$)
(b): Berechne $\partial_x f(0,0)$ und $\partial_y f(0,0)$.

Loesung

(a): Wieso ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig? (Hinweis: Taylorreihe von $\sin(\ldots)$)
Fuer $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.
Mit $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$ folgt:

(26)
$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)\ \sin(y)}{xy} &= \frac{1}{xy}\,(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots)\,(y - \frac{y^3}{3!} + \ldots) \\
&= \frac{1}{xy}\,(xy - \frac{xy^3}{3!} - \frac{yx^3}{3!} + \ldots) = 1 - \frac{y^2}{3!} - \frac{x^2}{3!} + \ldots \xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 1 = f(0,0) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(b): Berechne $\partial_x f(0,0)$ und $\partial_y f(0,0)$.

$$\partial_x(1 - \frac{y^2}{3!} - \frac{x^2}{3!} + \ldots)|_{(x,y)=(0,0)} = 0 \tag{27}$$

Analog $\partial_y f(0,0) = 0$

(10) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(2\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \tag{28}$$

Wie muss die Konstante a gewhlt werden, damit $f(x,y)$ in $(0,0)$ stetig ist? (Hinweis: bergang zu Polarkoordinaten)

Loesung

bergang zu Polarkoordinaten liefert:

$$a = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(2r)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{2\sin(r)\cos(r)}{r} = 2\cdot \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r)}{r} \cdot \lim_{r\to 0} \cos(r) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

Lösungen zu Kapitel 7

Aufgabe 1: Sei (M,d) metrischer Raum, $A \subset M$. $d_A(x) := \inf_{y\in A} d(x,y)$

(a)

$$\operatorname{sdist}(x,A) := \begin{cases} d_A(x), & x \notin A \\ -d_{M\setminus A}(x), & x \in A \end{cases}$$

(i) $\operatorname{sdist}(x,A) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathring{A}$

Beweis. Sei $\operatorname{sdist}(x,A) < 0 \Rightarrow d_{M\setminus A}(x) =: \varepsilon > 0 \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset A \Rightarrow x \in \mathring{A}$.
Sei $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A \Rightarrow d_{M\setminus A}(x) \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow \operatorname{sdist}(x,A) < 0$. □

(ii) $\operatorname{sdist}(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial A$.

Beweis. Sei $\operatorname{sdist}(x,A) = 0 \Rightarrow d_A(x) = 0 \wedge d_{M\setminus A}(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \cap M \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \partial A$.
Sei $x \in \partial A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \cap M \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow d_A(x) \geq 0 \wedge d_{M\setminus A} \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sdist}(x,A) = 0$. □

(iii) $\operatorname{sdist}(x,A) > 0 \Leftrightarrow x \in M \setminus \overline{A}$.

Beweis. Sei $\mathrm{sdist}(x, A) > 0 \Rightarrow d_A(x) =: \varepsilon > 0 \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset M \setminus A \Rightarrow x \in \mathrm{int}(M \setminus A) = M \setminus \overline{A}$.
Sei $x \in M \setminus \overline{A} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset M \setminus A \Rightarrow d_A(x) \geq \varepsilon > 0$ $\Rightarrow \mathrm{sdist}(x, A) > 0$. □

(b) $x \mapsto d_A(x)$ ist LIPSCHITZ-stetig.

Beweis. Es gilt $d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)\ \forall a \in A$, also auch für das Infimum über alle a:

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y)$$

Dasselbe gilt für x und y vertauscht, also $d_A(y) \leq d(x, y) + d_A(x)$. Insgesamt ergibt sich dann

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$$

oder genauer

$$d^{\mathbb{R}}(d_A(x), d_A(y)) \leq d^M(x, y)$$

Damit ist $d_A : M \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-stetig. □

Aufgabe 2: Zu zeigen ist $\forall x, y \in M, x \neq y\ \exists$ Umgebung U von x, Umgebung V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = r \neq 0$. Setze $\varepsilon \leq \frac{r}{2}$ und $U = U_\varepsilon(x), V = U_\varepsilon(y)$, dann gilt offensichtlich $U \cap V = \emptyset$.
Sei nämlich $z \in U$, dann $2\varepsilon \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + d(z, y) \Rightarrow d(z, y) > \varepsilon$. □

Aufgabe 3:

(O1) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Beweis. Es genügt zu zeigen $A \cap B$ offen für A, B offen.
Sei also $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ und $x \in B$.
A offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 : U_{\varepsilon_1}(x) \subset A$
B offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : U_{\varepsilon_2}(x) \subset B$
Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dann $U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_i}(x)$ für $i = 1, 2$ und damit $U_\varepsilon(x) \subset A \cap B$, also $A \cap B$ offen. □

(A1) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. Es genügt wieder zu zeigen, dass $A \cup B$ abgeschlossen für A, B abgeschlossen. Bezeichne wie üblich $M \setminus A =: A^c$.

A, B abgeschlossen heißt A^c, B^c offen $\overset{(O1)}{\Rightarrow} A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ offen, also $A \cup B$ abgeschlossen. □

(A2) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. Sei I beliebige Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, dann ist für jedes $i \in I$ die Menge A_i^c offen. Aus (O2) folgt dann

$$\bigcup_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c \text{ offen}$$

und somit $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ abgeschlossen. □

Aufgabe 4: Sei (M, d) metrischer Raum, $A \subset M$. Zu zeigen ist $\overline{A}$ und ∂A sind abgeschlossen in M.

($\overline{A}$): Der Abschluss ist $\overline{A} = \{x \in M : x \text{ Berührpunkt von } A\}$, wobei für einen Berührpunkt gilt: x Berührpunkt von A, wenn für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap A \neq \emptyset$.
Sei also $y \in M \setminus \overline{A} = (\overline{A})^c$. y ist damit kein Berührpunkt von A, $\exists$ Umgebung U von y mit $U \cap A = \emptyset$, also $U \subset M \setminus \overline{A}$. Damit ist $M \setminus \overline{A} = (\overline{A})^c$ offen und somit $\overline{A}$ abgeschlossen.

(∂A): Der Rand von A ist $\partial A = \{x \in M : x \text{ Randpunkt von } A\}$. Ein Randpunkt von A ist ein Punkt x, für den gilt: $\forall$ Umgebungen U von x ist $U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A^c \neq \emptyset$.
Das Komplement des Randes ist

$$(\partial A)^c = \{y \in M : \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } y \text{ mit } U \cap A = \emptyset \vee U \cap A = \emptyset\}$$

also $(\partial A)^c = \{y \in M : U \subset A \vee U \subset A^c\}$. Damit ist $(\partial A)^c$ offen und ∂A abgeschlossen.

Aufgabe 5: Aus Lipschitz-Stetigkeit folgt gleichmäßige Stetigkeit und somit Stetigkeit.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ Lipschitz-stetig, also existiert ein $L \geq 0$ sodass

$$d^Y(f(x), f(y)) \leq L d^X(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

f gleichmäßig stetig bedeutet

$$\forall \varepsilon < 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X \text{ mit } d^X(x, y) < \delta : d^Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Setze also $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, dann folgt sofort die Behauptung.
f stetig heißt $\forall y \in X$ gilt:

$$\forall \varepsilon < 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in X \text{ mit } d^X(x, y) < \delta : d^Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dies folgt aber direkt aus der gleichmäßigen Stetigkeit. □

Bemerkung: Die gewöhnliche Stetigkeit ist die Stetigkeit in jedem Punkt (punktweise Stetigkeit), insbesondere hängen ε und δ vom betrachteten Punkt ab. Gleichmäßige Stetigkeit ist stärker, hier sind ε und δ für alle Punkte gleich.

Aufgabe 6: $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $M \subset \mathbb{R}^m$ offen. Zu zeigen ist $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beweis. **Alternative 1:** Mit $\varepsilon - \delta$ Definition.
Sei $x \in f^{-1}(M)$. Da M offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subset M$. Da f stetig ist, gibt es zu diesem ε ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in U_\delta(x)$ auch $f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$, d.h. $y \in F^{-1}(M)$. Also ist $f^{-1}(M)$ offen.

Alternative 2: Das Komplement von M, M^c, ist abgeschlossen. D.h., ist $y_n \in M^c$, $n \in \mathbb{N}$, mit $y_n \to y$, so ist auch $y \in M^c$. Wir zeigen, dass $(f^{-1}(M))^c$ abgeschlossen und damit, dass $f^{-1}(M)$ offen ist:
Sei $x_n \in (f^{-1}(M))^c$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $f(x_n) \in M^c$ und, wegen der Stetigkeit von f gilt $f(x_n) \to f(x) \in M^c$, da M^c abgeschlossen ist. Das bedeutet aber, dass $x \in (f^{-1}(M))^c$.

□

Aufgabe 7: Sei $f : X \to Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt. Zu zeigen ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K. Da K kompakt gibt es eine in K konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in K$.
Es ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $f(K)$ und $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge mit

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{f \text{ stetig}}{=} f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x) \in f(K)$$

Damit besitzt $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen $f(x)$ konvergente Teilfolge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ woraus die Behauptung folgt. □