Parameterabhängige Integrale, Kurven, Kurvenintegrale
Lösungen

Marcus Jung

02.09.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Parameterabhängige Integrale

1.1 Aufgabe 1:

- $F'(x) = \int\limits_1^{\pi} cos(tx)dt \qquad F''(x) = -\int\limits_1^{\pi} t * sin(tx)dt$
- $J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} sint*sin(x*sint-nt)dt \qquad J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} sin^2t*cos(x*sint-nt)dt$
- $F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int t * sin(x^2)dt = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}t^2 sin(x^2)$
  $= \frac{1}{2}t^2 * cos(x^2) * 2x$
- $F'(x) = \int \frac{\partial}{\partial x} t * sin(x^2)dt = \int 2xtcos(x^2)dt = 2xcos(x^2) * \frac{1}{2}t^2$
- $F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int (2x^2 + 3t)dt = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 t + \frac{3}{2}t^2) = 4tx$
- $F'(x) = \int \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 3t)dt = \int 4xdt = 4xt$
- $F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int e^{2xt}dt = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2x} * e^{2xt}) = -\frac{1}{2x^2} * e^{2xt} + \frac{t}{x} * e^{2xt}$
- $F'(x) = \int \frac{\partial}{\partial x} e^{2xt}dt = \int 2te^{2xt}dt \rightarrow p.I.$
  $= -\frac{1}{2x^2} * e^{2xt} + \frac{t}{x} * e^{2xt}$

1.2 Aufgabe 2:

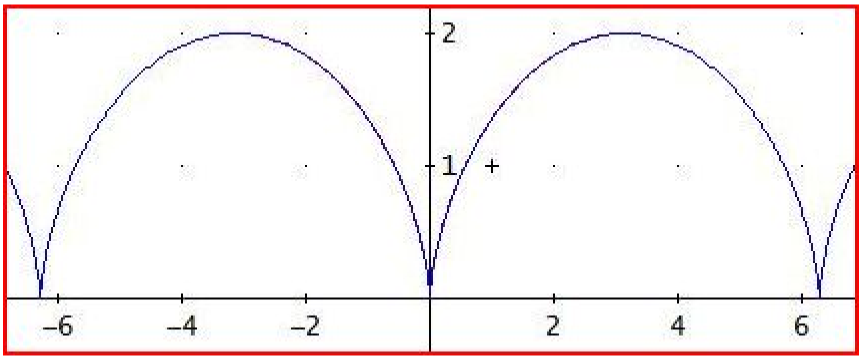
- Annahme war: $F(x, g(x), h(x)) := \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy$ ist stetig differenzierbar.
  $\rightarrow \frac{d}{dx}F(x, g(x), h(x)) =$
  $\frac{\partial}{\partial x}F(x, g(x), h(x)) + \frac{\partial}{\partial g}F(x, g(x), h(x)) * g'(x) + \frac{\partial}{\partial h}F(x, g(x), h(x)) * h'(x)$
- $F'(x) = \int\limits_1^{x^2}(2k * t^2 * cos(2xt^2))dt + 2 * x * k * sin(2x^5) - 0$
- Da die beiden Integrationsgrenzen gleich sind, fällt natürlich der erste Faktor der Leibnizformel weg. Da $h'(x) = g'(x) = 2 * x$ sind, heben sich die beiden letzten Terme der Leibnizformel auf, und man erhält wie erwartet 0 als Ergebnis.

2 Kurven

2.1 Aufgabe 1:

- $\vec{c}(t) = (r(1 - cost), r * sint)^T$

  $||\vec{c}(t)|| = r\sqrt{(1 - cost)^2 + sin^2 t} = 2 * r * sin\frac{t}{2}$
  $L(\vec{c}) = 2r \int\limits_0^{2\pi} sin\frac{t}{2} dt = 8r$

- 

2.2 Aufgabe 2:

- Bedingungen für horizontale Tangente:
  a) $c(x,y) = x^2 - xy + y^2 = 2$
  $b)\partial_x(c(x,y)) = 2x - y = 0$
  $c)\partial_y(c(x,y)) = -x + 2y \neq 0$
  Setzt man b) in a) ein, erhält man: $(x_1, y_1) = (\sqrt{\frac{2}{3}}, 2 * \sqrt{\frac{2}{3}})$ und $(x_2, y_2) = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, -2 * \sqrt{\frac{2}{3}})$
  Nun wäre noch Bedingung c) zu prüfen.

- Bedingungen für vertikale Tangente:
  a) $c(x,y) = x^2 - xy + y^2 = 2$
  $b\partial_x(c(x,y)) = 2x - y \neq 0$
  $c)\partial_y(c(x,y)) = -x + 2y = 0$
  Setzt man b) in a) ein, erhält man: $(x_1, y_1) = (2 * \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ und $(x_2, y_2) = (-2 * \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$
  Nun wäre noch Bedingung c) zu prüfen.

- Bedingungen für horizontale Tangente:
  a) $c(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$
  $b)\partial_x(c(x,y)) = 3x^2 - 3y = 0$
  $c)\partial_y(c(x,y)) = -3y^2 - 3x \neq 0$
  Setzt man b) in a) ein, erhält man: $(x_1, y_1) = (0,0)$ und $(x_2, y_2) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$
  Nun wäre noch Bedingung c) zu prüfen.
- Bedingungen für vertikale Tangente:
  a) $c(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$
  $b)\partial_x(c(x,y)) = 3x^2 - 3y \neq$
  $c)\partial_y(c(x,y)) = -3y^2 - 3x = 0$
  Setzt man b) in a) ein, erhält man: $(x_1, y_1) = (0,0)$ und $(x_2, y_2) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$
  Nun wäre noch Bedingung c) zu prüfen.
- Bedingungen für singuläre Punkte:
  a) $c(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$
  $b)\partial_x(c(x,y)) = 3x^2 - 3y = 0$
  $c)\partial_y(c(x,y)) = -3y^2 - 3x = 0$
  Setzt man die Bedingungen ineinander ein, erhält man als singulären Punkt:
  $(x_1, y_1) = (0,0)$

3 Kurvenintegrale

3.1 Aufgabe 1:

$$\theta_{x-Achse} = \int_0^l \rho * 1 * (tsin\alpha)^2 dt = \frac{1}{3}\rho l^3 sin^2\alpha$$

3.2 Aufgabe 2:

$$\oint_{\vec{c}} \vec{u}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^{2\pi} < (1 + r * sint, 0)^T, (-r * sint, r * cost)^T > dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (-rsint - r^2 sin^2 t) dt = -\pi * r^2$$

3.3 Aufgabe 3:

$$\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^{2\pi} < (-sint, cost)^T, (-sint, cost)^T > dt =$$
$$\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \neq 0$$

Das Vektorfeld $\vec{f}(x,y)$ ist also nicht wirbelfrei, besitzt folglich auch kein Potential und ist damit auch nicht konservativ. Somit ist das Kurvenintegral auch nicht wegunabhängig.

3.4 Aufgabe 4:

Notwendige Bedingung im $\mathbb{R}^3 : rot\vec{K}(\vec{x}) = \vec{0}$
Hier: $rot\vec{K}(\vec{x}) = (0, 0, -2)$, somit existiert kein Potential für $\vec{K}(\vec{x})$

$$\int_{\vec{c}} \vec{K}(\vec{x})d\vec{x} =$$

$$\int_0^{2\pi} < (\frac{1}{2} * (1 + cos2t + sin2t, \frac{1}{2} * sin2t - 1 - cos2t, sint)^T, (-sin2t, cos2t, cost)^T > dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2}sin^2 2t - \frac{1}{2}cos^2 2t - \frac{1}{2}cos2t)dt = \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2t)dt = -\pi$$

Parametrisieren durch $\vec{c}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), \quad 0 \leq t \leq 1$

$c_1(t) = (1, 0, 0)^T + t * (-1, 0, 1)^T$

$$\rightarrow \int_{c_1} \vec{K}(\vec{x})d\vec{x} = \int_0^1 < (1 - t, -1 + t, t)^T, (-1, 0, 1)^T dt = 0$$

$c_2(t) = (0, 0, 1)^T + t * (0, 0, -2)^T$

$$\rightarrow \int_{c_2} \vec{K}(\vec{x})d\vec{x} = \int_0^1 < (0, 0, 1 - 2t)^T, (0, 0, -2)^T dt = 0$$

$c_3(t) = (0, 0, -1)^T + t * (1, 0, 1)^T$

$$\rightarrow \int_{c_3} \vec{K}(\vec{x})d\vec{x} = \int_0^1 < (t, -t, -1 + t)^T, (1, 0, 1)^T dt = 0$$

$$\rightarrow \int_{\vec{c}} \vec{K}(\vec{x})d\vec{x} = 0$$

3.5 Aufgabe 5:

a) Mit $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_1 = y * z$ folgt durch Integration bzgl. der Variablen x:
$\varphi(\vec{x}) = x * y * z + c(y, z)$.
Setzt man dies nun weiter ein, erhält man:
$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_2 = \frac{z^2}{2} + xz = xz + \frac{\partial c}{\partial y}$
$\rightarrow c(y, z) = \frac{yz^2}{2} + d(z) \rightarrow \varphi(\vec{x}) = x * y * z + \frac{yz^2}{2} + d(z)$
Dies in die 3. Bedingung eingesetzt ergibt:
$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_3 = y * (x + z) = xy + yz + \frac{\partial d}{\partial z}$
$\rightarrow \frac{\partial d}{\partial z} = 0 \rightarrow d = C = const. \rightarrow \varphi(\vec{x}) = xyz + \frac{yz^2}{2} + C$

b)

- $\vec{v}_p$ besitzt genau dann ein Potential, wenn die Rotation=0 ist:
  $rot\vec{v}_p = (x - x, y - py, z - pz) = \vec{0} \rightarrow$ p muss der Bedingung p=1 genügen!

- Das Potential lässt sich auch einfach raten, jedoch muss man dann beweisen, dass es auch wirklich ein Potential ist:
  Annahme: Das Potential sei: $f(x, y, z) = xyz + x^2 - y^2$
  Beweis:
  $gradf(x, y, z) = (yz + 2x, xz - 2y, xy)^T = \vec{v}_1$
  Somit ist f(x,y,z) ein Potential von $\vec{v}_1$

- $\int\limits_{\vec{c}} \vec{v}_p(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_0^1 < (pt^3 + 2t, t^3 - 2t, t^2)^T, (1, 1, 2t)^T > dt =$
  $\int\limits_0^1 (p + 3)t^3 dt = \frac{p+3}{4}$

3.6 Aufgabe 6:

- $rot\vec{K}(\vec{r}) = 0 \quad \forall\vec{r}$

- $\oint\limits_{\vec{c}} \vec{K}(\vec{r})d\vec{r} = 0 \quad \forall\vec{c}$

- Es existiert ein U, für das gilt: $\vec{K}(\vec{r}) = -gradU(\vec{r})$

- $rot\vec{K}(\vec{r}) = \vec{0}$

- Wegintegral entlang eines Kreises $\rightarrow$ Polarkoordinaten
  $r(\varphi) = r_0 * (cos\varphi, sin\varphi, 0)^T, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$
  $\frac{\partial r}{\partial\varphi} = r_0 * (-sin\varphi, cos\varphi, 0)^T = r_0 * \vec{e}_\varphi$
  $\vec{K}(\vec{r}(\varphi)) = \frac{1}{r_0^2} * (-r_0 * sin\varphi, r_0 * cos\varphi, 0)^T = \frac{1}{r_0} * \vec{e}_\varphi$
  $\oint\limits_{\vec{c}} \vec{K}(\vec{r})d\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{K}(\vec{r}(\varphi))\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r_0} * \vec{e}_\varphi * \vec{e}_\varphi * r_0 d\varphi =$
  $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$

3.7 Aufgabe 7:

$\partial_1 v_2(x, y) = \partial_x(x * (x^2 + y^2)^\alpha) = (x^2 + y^2)^\alpha + 2\alpha x^2(x^2 + y^2)^{\alpha-1}$
$\partial_2 v_1(x, y) = \partial_y(-yx(x^2 + y^2)^\alpha) = -(x^2 + y^2)^\alpha - 2\alpha y^2(x^2 + y^2)^{\alpha-1}$
$0 = \partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y) = 2 * (x^2 + y^2)^\alpha + 2 * \alpha * (x^2 + y^2)^\alpha =$
$2 * (x^2 + y^2)^\alpha * (1 + \alpha)$.
Somit ist die Integrabilitätsbedingung genau dann erfüllt, wenn $\alpha = -1$.

3.8 Aufgabe 8:

Die Masse M ist: $\int\limits_{\vec{c}} \rho dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}(1-cost)}||\vec{c}(t)||dt =$

$\int\limits_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = 4$

Die y-Koordinate des Schwerpunktes ist aus Symmetriegründen 0. Für die x-Koordinate erhält man:

$s_x = \frac{1}{M}\int\limits_{\vec{c}} xf(x,y)dl = \frac{1}{M}\int\limits_0^{2\pi} c_1(t) * sin(\frac{t}{2})dt =$

$\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} cost * sin(\frac{t}{2})dt =$

$\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) * \frac{1}{2i}(e^{\frac{it}{2}} - e^{\frac{-it}{2}})dt =$

$-\frac{1}{16}(-\frac{4}{3} + 4 + 4 - \frac{4}{3}) = -\frac{1}{3}$

3.9 Aufgabe 9:

Zunächst berechnet man die Rotation:

$rot\vec{f} = \vec{0}$

Also besitzt $\vec{f}(\vec{x})$ ein Potential $\varphi(\vec{x})$.

Aus $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f_1 = \frac{2xy}{r^2} + sinz$ folgt durch Integration bezüglich der Variablen x:

$\varphi(\vec{x}) = y * ln(r^2) + xsinz + c(y,z)$ mit einer unbekannten funktion $c(y,z)$. Dies setzt man nun in f_2 ein und erhält:

$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f_2 = ln(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + z * e^y$

$\rightarrow ln(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = ln(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + z * e^y$

und somit erhält man: $c(y,z) = z * e^y + d(z)$

Dies setzt man nun in die 3. Bedingung ein und erhält:

$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{2yz}{r^2} + x * cosz + e^y + d'(z) = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x * cosz$

Damit ist $d'(z) = 0 \rightarrow d(z) = C = const.$

Somit lautet das gesuchte Potential: $\varphi(\vec{x}) = y * ln(r^2) + x * sinz + z * e^y + C$