Parameterabhängige Integrale, Kurven, Kurvenintegrale
Übung

Marcus Jung

02.09.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Parameterabhängige Integrale

1.1 Aufgabe 1:

Berechne für folgende Stammfunktionen die 1. und 2. Ableitung:

- $F(x) = \int\limits_1^{\pi} \frac{sin(t*x)}{t} dt$
- $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} cos(x * sint - n * t)dt, \qquad n \in \mathbb{Z}$ (Besselfunktion)

Man zeige für folgende Funktionen, dass der Satz über die Differenzierbarkeit gilt: (Berechne $F'(x)$ über 2 verschiedene Wege)

- $f(x,t) = t * sin(x^2)$
- $f(x,t) = 2 * x^2 + 3t$
- $f(x,t) = e^{2*x}$

1.2 Aufgabe 2:

Integrationsgrenzen g, h hängen von zusätzlichem Parameter ab. $f(x,y)$ genügt Annahmen aus der Vorlesung.

- Zeige, dass die Leibnizregel erfüllt ist!
- Berechne $F'(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_1^{x^2} k * sin(2xt^2)dt$
- Was passiert, wenn $g(x) = h(x) = x^2$? (Beweis!)

2 Kurven

2.1 Aufgabe 1:

- Berechne die Bogenlänge $L(\vec{c})$ folgender Kurve:
  $\vec{c}(t) = (r * (t - sint), r * (1 - cost))^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- Zeichne die Kurve!

2.2 Aufgabe 2:

Suche horizontale und vertikale Tangenten für folgende Kurven:

- $c(x,y) := x^2 - xy + y^2 = 2$ (implizit definiert)
- $c(x,y) := x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (implizit definiert), wo gibt es hier singuläre Punkte?

3 Kurvenintegrale

3.1 Aufgabe 1:

Rotiert ein Massenpunkt der Masse m im Abstand r und mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse, so gilt für die kinetische Energie
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$
Der Term $\theta = mr^2$ heißt **Trägheitsmoment** des Massepunkts bezüglich der festen Achse. Bei einem System von N Massenpunkten (m_i, r_i) addieren sich die einzelnen Trägheitsmomente zu einem Gesamt-Trägheitsmoment:

$$\theta_{ges} = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2$$

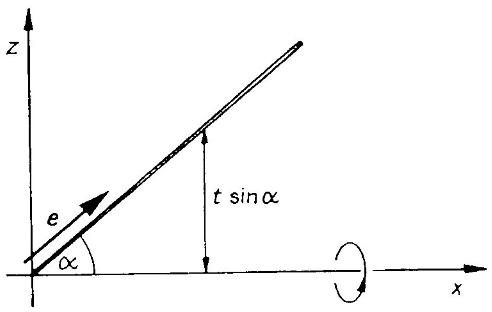
Für einen massebelegten Draht folgt schließlich:

$$\theta_{ges} = \sum_{i} \rho(\vec{c}(t_i))||\vec{c}(t_{t+1}) - \vec{c}(t_i)||r^2(\vec{c}(t_i))$$

$$\to \int_a^b \rho(\vec{c}(t))||\dot{\vec{c}}(t)||r^2(\vec{c}(t))dt, \qquad ||Z|| \to 0$$

Hier ist $\rho(\vec{x})$ die orsabhängige Dichte des Drahtes und $r(\vec{x})$ der Abstand des Punktes $\vec{x}$ von der Drehachse.

Berechne das Trägheitsmoment für einen Stab der Länge l mit konstanter Dichte $\rho(\vec{x}) = \rho$ bezüglich x-Achse (Parametrisierung: $\vec{c}(t) = t * \vec{e}, ||\vec{e}|| = 1$)



3.2 Aufgabe 2:

In der Strömungslehre heißt das Kurvenintegral $\oint_{\vec{c}} \vec{u}(\vec{x})d\vec{x}$ eines Geschwindigkeitsfeldes $\vec{u}(t)$ längs einer geschlossenen Kurve auch **Zirkulation** des Feldes $\vec{u}(\vec{x})$ längs $\vec{c}$.
Bestimme die Zirkulation für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(x, y) = (y, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ längs des Kreises $\vec{c}(t) = (r * cost, 1 + r * sint)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

3.3 Aufgabe 3:

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} * (-y,x)^T, \quad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2$ mit der Kurvenparametrisierung $\vec{c}(t) := (cost, sint)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
Ist das Vektorfeld wirbelfrei und damit das Kurvenintegral wegunabhängig? (Beweis!)

3.4 Aufgabe 4:

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{K}(\vec{x}) := (x+y, y-x, z)^T$ und der Weg
$\vec{c}(t) = (\frac{1}{2}(1+cos(2t)), \frac{1}{2}sin(2t), sint)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
Besitzt $\vec{K}$ ein Potential? Man berechne $\int\limits_{\vec{c}} < \vec{K}(\vec{x}), d\vec{x} >$.
Man berechne die Arbeit längs des Weges bestehend aus den Stecken von (1,0,0) nach (0,0,1), dann nach (0,0,-1) und dann nach (1,0,0)

3.5 Aufgabe 5

a) Bestimme ein Potential zum Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = (yz, \frac{z^2}{2} + xz, y(x+z))^T$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

b) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}_p(x,y,z) = (pyz+2x, xz-2y, xy)^T \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, p \in \mathbb{R}$

- Man zeige: $\vec{v}_p$ besitzt nur für $p=1$ ein Potential
- Man berechne für $p=1$ ein zu $\vec{v}_1$ zugehöriges Potential
- Für $\vec{v}_p$ berechne man die Arbeit $\int\limits_{\vec{c}} < \vec{v}_p(\vec{x}), d\vec{x} >$ längs $\vec{c}(t) = (t,t,t^2), \quad 0 \leq t \leq 1$ in Abhängigkeit von p.

3.6 Aufgabe 6:

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{K}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}(-y,x,0)^T, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

- Nenne 3 äquivalente Bedingungen dafür, dass ein Kraftfeld konservativ ist!
- Berechne $rot\vec{K}(\vec{r})$
- Berechne das geschlossene Wegintegral entlang eines Kreises in der x-y-Ebene mit dem Radius $r_0 > 0$ und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung! Wie hängt das Ergebnis von r_0 ab? (Hinweis: Polarkoordinaten)

3.7 Aufgabe 7:

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha * (-y,x)^T$. Für welches α ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt?

3.8 Aufgabe 8:

Ein Kreisring, parametrisiert durch die Kurve $\vec{c}(t) = (cost, sint)^T, \quad t \in [0, 2\pi]$ hat eine Linienmassendichte, gegeben durch $\rho(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}$. Berechne die Gesamtmasse M und die Schwerpunktkoordinaten!

3.9 Aufgabe 9:

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) = (\frac{2xy}{r^2} + sinz, ln(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + z * e^y, \frac{2yz}{r^2} + e^y + xcosz)^T$,
$r^2 := x^2 + y^2 + z^2$
Besitzt $\vec{f}(\vec{x})$ ein Potential? Wenn ja, welches?