Ferienkurs der TU München- - Analysis 2

Funktionen in mehreren Variablen

Lösung

Jonas J. Funke

30.08.2010 - 03.09.2010

1 Warm up - partielles Differenzieren

Aufgabe 1 (Potentialkasten)**.** Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\Psi(x,y,z) = \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) \text{ mit } n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Potentialkasten löst:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

und berechnen Sie die möglichen Energieniveaus E_{n_x,n_y,n_z}.

Loesung 1. Wir leiten Ψ zweimal nach x ab und erhalten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,y,z) = -\pi^2 n_x^2 \cdot \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) = -\pi^2 n_x^2 \cdot \Psi(x,y,z)$$

Analog folgt $\Psi_{yy}(x,y,z) = -\pi^2 n_y^2 \Psi(x,y,z)$ und $\Psi_z(x,y,z) = -\pi^2 n_z^2 \Psi(x,y,z)$. Dies setzen wir in die gegeben Schrödingergleichung ein und erhalten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}(n_x^2+n_y^2+n_z^2) = E_{n_x,n_y,n_z}\Psi(x,y,z)$$

$$\Rightarrow E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$$

Aufgabe 2 (Wellengleichung)**.** Sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

die Wellengleichung

$$\partial_t^2\Psi(t,x) = c^2\partial_x^2\Psi(t,x)$$

erfüllt.

Loesung 2. Wir führen zunächst die neuen Variablen

$$u(x,t) = x - ct$$
$$v(x,t) = x + ct$$

Nun berechnen wir die partielle Ableitung nach t:

$$\partial_t^2\Psi(x,t) = \partial_t(f_u(u)\cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=-c} + g_v(v)\cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c}) = -c\cdot f_{uu}(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + c\cdot g_{vv}(v)\cdot\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\left(f_{uu} + g_{vv}\right)$$

Nun nach x:

$$\partial_x^2\Psi(x,t) = \partial_x\left(f_u \cdot 1 + g_v \cdot 1\right) = f_{uu} + g_{vv}$$

Dies setzt man in die Wellengleichung ein und verifiziert so die Lösung.

Aufgabe 3 (Richtungsableitung)**.** Gegeben ist

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Bestimme die Richtungsableitung in $\mathbf{x_0}$ in Richtung $\mathbf{v_1} = (3,4)^T$ und $\mathbf{v_2} = (1,-1)^T$.
Wie gross ist die maximale und minimale Steigung?

Loesung 3. Mit

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

folgt $\mathbf{v_1}$ - Achtung normieren! - :

$$\partial_{\mathbf{v_1}} f(1,2) = \frac{1}{\sqrt{3^2+5^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \tag{3}$$

und analog

$$\partial_{\mathbf{v_2}} f(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \tag{4}$$

Der Gradient zeigt in Richtung des groessten Anstiegs und die maximale Steigung ist daher

$$\left\| \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

Entsprechend ist die minimale Steigung $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

2 Taylorentwicklung

Aufgabe 4 (Taylorentwicklung)**.** Gegeben sei eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $\Psi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, die im Ursprung einen kritischen Punkt hat. Außerdem gilt:

$$\Psi(\mathbf{0}) = \pi \quad \partial_2^2\Psi(\mathbf{0}) = 2 \quad \partial_1^2\Psi(\mathbf{0}) = 4 \quad \partial_1\partial_2\Psi(\mathbf{0}) = 0 \tag{6}$$

Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung in $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$

Loesung 4.

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \Psi(\mathbf{0}) + \underbrace{\text{grad}\Psi(\mathbf{0})}_{=0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,(x,y) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R_3(x,y) \\ &= \pi + 2x^2 + y^2 + R_3(x,y) \end{aligned} \tag{7}$$

Aufgabe 5 (Taylorentwicklung)**.** Gegeben sei eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) = 2 \quad \partial_x f(\mathbf{0}) f(\mathbf{0}) = -3 \quad \partial_x \partial_y f(\mathbf{0}) = 2 \\ \partial_x^2 f(\mathbf{0}) = 1 \quad \partial_x^2 \partial_y f(\mathbf{0}) = \partial_y \partial_x \partial_x f(\mathbf{0}) = 5 \quad \partial_y^3 f(\mathbf{0}) = 6 \end{aligned} \tag{8}$$

Alle nicht angegeben Ableitungen verschwinden.
Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung in $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$

Loesung 5.

$$0.\text{ Ordnung} = 2 \tag{9}$$
$$1.\text{ Ordnung} = -3x \tag{10}$$
$$2.\text{ Ordnung} = 2xy + \frac{x^2}{2} \tag{11}$$
$$3.\text{ Ordnung} = 5\frac{x^2 y}{2} + 6\frac{y^3}{3!} \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

Also $f(x, y) = 2 - 3x + 2xy + \frac{x^2}{2} 5\frac{x^2 y}{2} + y^3$

3 Extremwertberechnung

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und chrakterisieren Sie diese.

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$$

Loesung 6.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 12y \\ -12x + 24y^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$I \quad 3x^2 - 12y = 0$$

$$II \quad -12x + 24y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y^2$$

II in I:

$$0 = y(y^3 - 1) \Leftrightarrow (y_1 = 0, x_1 = 0) \quad \vee \quad (y_2 = 1, x_2 = 2)$$

Die Punkte $P_1(0, 0)$ und $P_2(2, 1)$ sind stationäre, bzw. kritische Punkte.

$$\det(H_f(x)) = \det \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix} = 288xy - 122$$

Es ergibt sich:

$$P_1(0,0) : \det(H_f(0,0)) = -122 < 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$

$$P_2(2,1) : \det(H_f(2,1)) > 0 \quad \text{mit} \quad f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Rightarrow lokalesMinimun$$

Aufgabe 7. Bestimmen sie lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte folgender Funktionen:

(a)
$$f(x,y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$$

(b)
$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$$

Loesung 7. (a) Es ergeben sich vier kritische Punkte:

$(1,2)$: $\det H_f = -144 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(1,-2)$: $\det H_f = -144 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(0,0)$: $\det H_f = 144 > 0$ und $f_{xx} = -24 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

$(2,0)$: $\det H_f = 144 > 0$ und $f_{xx} = 24 < 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

(b) Es ergeben sich zwei kritische Punkte:

$(2,0)$: $\det H_f = -4 \cdot e^{-4} < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(0,0)$: $\det H_f = 4 > 0$ und $f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

4 Extremwertberechnung mit NB

Aufgabe 8. Gegeben ist

$$f(x,y,z) = x - y + z \tag{14}$$

und die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\} \tag{15}$$

Bestimmen Sie Maxima und Minima der Funktion f, die auf die Menge M beschränkt ist.

Loesung 8. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathscr{L}(x, y, z, \lambda) = x - y + z + \lambda\ \left(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2\right) \tag{16}$$

Wie lösen das Gleichungssystem:

$$\partial_x \mathscr{L} = 1 + 2x\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1}{2\lambda} \tag{17}$$

$$\partial_y \mathscr{L} = -1 + 2y\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2\lambda} \tag{18}$$

$$\partial_z \mathscr{L} = 1 + 4z\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1}{4\lambda} \tag{19}$$

$$\partial_\lambda \mathscr{L} = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1}{2\lambda} \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

Wir setzen Gleichung 17-19 in die letzte Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + 2\frac{1}{16\lambda^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm\frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned} \tag{22}$$

Das Maximum liegt bei $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -2, 1)$, das Minimum bei $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 2, -1)$

Aufgabe 9. Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ mit $a, b > 0$. Gesucht ist ein achsenparalleles Rechteck innerhalb diese Ellipse mit maximalem Flaecheninhalt. Benutzen Sie die Lagrange-Methode.

Loesung 9. Der Flaecheninhalt eines Rechtecks ist durch $A(x, y) = 2x\ 2y$ gegeben. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{23}$$

Man erhaelt das folgende Gleichungssystem:

$$\partial_x \mathscr{L} = 4y + \frac{2x\lambda}{a^2} = 0 \tag{24}$$

$$\partial_y \mathscr{L} = 4x + \frac{2y\lambda}{b^2} = 0 \tag{25}$$

$$\partial_\lambda \mathscr{L} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{26}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \tag{27}$$

Zusammen mit der letzten Gleichung (und unter Vernachlaessigung negativen Loesung) erhaelt man:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}} \tag{28}$$

5 Implizite Funktionen

Aufgabe 10 (Aufloesbarkeit)**.** Gegeben ist die implizite Gleichung $f(x, y, z) = c$ (mit f stetig partiell differenzierbar und $c = \text{const} \in \mathbb{R}$) und ein Punkt (x_0, y_0, z_0).
Was muss ueberprueft werden, um zu zeigen, dass sich die implizite Gleichung lokal in (x_0, y_0, z_0) nach $y = \tilde{y}(x, z)$ aufloesen laesst?

- ☐ $f(x_0, y_0, z_0) = 0$
- ☐ $f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- ☐ $f(x_0, y_0, z_0) = c$
- ☐ $f(x_0, y_0, z_0) \neq c$
- ☐ $\partial_x f(x_0, y_0, z_0) = 0$
- ☐ $\partial_y f(x_0, y_0, z_0) = 0$
- ☐ $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) = 0$
- ☐ $\partial_x f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- ☐ $\partial_y f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- ☐ $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Geben sie den Gradienten $\text{grad}\tilde{y}(x_0, y_0)$ an.

Loesung 10. Es muss gelten:

- ☒ $f(x_0, y_0, z_0) = c$ (der Punkt erfuellt die implizite Gleichung)
- ☒ $\partial_y f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Man erhaelt:

$$\text{grad}\tilde{y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{y}(x_0, z_0) \\ \partial_z \tilde{y}(x_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial_x f(x_0,y_0,z_0)}{\partial_y f(x_0,y_0,z_0)} \\ -\frac{\partial_z f(x_0,y_0,z_0)}{\partial_y f(x_0,y_0,z_0)} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Aufgabe 11 (Implizite Funktionen)**.** Gegeben ist die implizite Gleichung $f(x, y, z) = x^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^4 = 0$. Ist diese Gleichung lokal an $(-\frac{1}{2}, 1)$ nach $y = \tilde{y}(x)$ aufloesbar? Geben Sie evtl. die Ableitung $\tilde{y}'(-\frac{1}{2})$ an.

Loesung 11. Wir ueberpruefen:

$$f(-\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \quad \checkmark \tag{30}$$

$$\partial_y f(-\frac{1}{2}, 1) = -xy - 2y^3 = -\frac{3}{2} \quad \checkmark \tag{31}$$

$\Rightarrow$ aufloesbar nach $y = \tilde{y}(x)$ in $(-\frac{1}{2}, 1)$. Nun die Ableitung:

$$\partial_x \tilde{y}(-\frac{1}{2}) = -\frac{2x - \frac{y^2}{2}}{-xy - 2y^3}\Bigg|_{x=-1/2, y=1} = -1 \tag{32}$$

Aufgabe 12 (Implizite Funktionen)**. (a)** Gegeben ist $f(x, y, z) = x - y^7 + z^3 - x^2 z - 1 = 0$. Zeigen Sie, dass sich diese Gleichung im Punkt $(1, 0, 1)$ lokal nach $z = g(x, y)$ aufloesen laesst. Geben Sie ausserdem die Taylorentwichlung in $(1, 0, 1)$ bis zur ersten Ordnung an.

(b) Gegeben ist die Gleichung:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}y^2(x^2 + 1) - 2yx^2 - 2y = 0 \tag{33}$$

Bestimme den Bereich $U \subset \mathbb{R}$, in dem sich die implizite Gleichung lokal nach $y = g(x)$ laesst.

(c) Gegeben ist

$$f(x, y, z) = 1 - z + e^{-2z} \cos(x - y) = 0 \tag{34}$$

Zeigen Sie, dass sich f in der Umgebung von $(\pi, 0, 0)$ nach $z = g(x, y)$ aufloesen laesst. Berechnen Sie grad$g(\pi, 0)$ und geben sie die Taylorentwicklung von g bis zur ersten Ordnung an.

Bestimmen Sie weiterhin einen Normalenvektor der Tangentialebene an $(\pi, 0, 0)$, die durch $f(x, y, z) = 0$ definiert ist.

Loesung 12. (a) Aus:

$$f(1,0,1) = 1+1-1-1 = 0 \quad \checkmark \tag{35}$$
$$\partial_z f(1,0,1) = 3z^2 - x^2|_{(1,0,1)} = 2 \neq 0 \quad \checkmark \tag{36}$$

folgt die lokale Aufloesbarkeit in $(1,0,1)$ nach $z = g(x,y)$. Mit

$$\partial_x g(1,0) = -\frac{\partial_x f}{\partial_z f}\bigg|_{(1,0,1)} = -\frac{1-2xz}{3z^2-x^2}\bigg|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2} \tag{37}$$
$$\partial_y g(1,0) = -\frac{\partial_y f}{\partial_z f}\bigg|_{(1,0,1)} = -\frac{-7y^6}{3z^2-x^2}\bigg|_{(1,0,1)} = 0 \tag{38}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(x,y) &\approx \underbrace{g(1,0)}_{=1} + \mathrm{grad} g(1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) \end{aligned} \tag{39}$$

(b) Es muss gelten:

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}y_0^2(x_0^2+1) - 2y_0x_0^2 - 2y_0 = \underbrace{(x^2+1)}_{\neq 0}\left(\frac{1}{2}y^2 - 2y\right) = 0 \tag{40}$$

$$\partial_y f(x_0,y_0) = y_0(x_0^2+1) - 2x_0^2 - 2 = (x^2+1)(y-2) \neq 0 \tag{41}$$

Aus 40 folgt:

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \quad y_0 = 0 \quad \text{oder} \quad y_0 = 4 \tag{42}$$

Aus 41 folgt lediglich:

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \quad y_0 \neq -2 \tag{43}$$

(c) Man findet:

$$f(\pi, 0, 0) = 1 + \cos(\pi) = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark \tag{44}$$

$$\partial_z f(\pi, 0, 0) = -1 - 2\cos(\pi) = 1 \neq 0 \quad \checkmark \tag{45}$$

$\Rightarrow$ aufloesbar nach $z = g(x), y$ in $(\pi, 0, 0)$. Nun die Ableitungen:

$$\partial_x g(\pi, 0, 0) = -\left.\frac{-e^{-2z}\sin(x-y)}{1}\right|_{\pi,0,0} = 0 \tag{46}$$

$$\partial_y g(\pi, 0, 0) = 0 \tag{47}$$

$\Rightarrow$ grad$g(\pi, 0) = (0, 0)^T$.
Die Taylorentwicklung bis zur 1. Ordnung lautet also:

$$z \approx 0 + (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x - \pi \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{48}$$

Die $z = 0$-Ebene ist die $x - y-$Ebene mit Normalenvektor $(0, 0, 1)$
Alternativ erinnert man sich, dass der Gradient senkrecht auf allen Niveauflaechen steh. Da $f(x, y, z) = 0$ eine Niveauflaeche darstellt, berechnet man den Normalenvektor wie folgt:

$$\text{grad} f(\pi, 0, 0) = \begin{pmatrix} -e^{2z_0}\ \sin(x_0 - y_0) \\ e^{2z_0}\ \sin(x_0 - y_0) \\ -1 - 2e^{-2z_0}\ \cos(x_0 - y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

6 Weitere Aufgaben

Aufgabe 13 (Taylorentwicklung)**.** Gegeben ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(x + y)$

(a) Entwickeln Sie die Funktion f bis zur zweiten Ordnung um (π, π).

(b) Entwickeln Sie die Funktion f bis zur dritten Ordnung um $(0, 0)$.

(c) Wie lautet die Hesse-Matrix von f am Punkt $(-\pi/4, -\pi/4)$?

Sei nun $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y, z) = f(x, y + z)$

(d) Entwickeln Sie die Funktion g bis zur ersten Ordnung um $(0, 0, 0)$.

(e) Wie viel Polynome dritter Ordnung hat die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von g um $(0, 0, 0,)$?

(f) Wie lautet die Hesse-Matrix von g am Punkt $(0, 0, 2\pi)$.

Loesung 13. (a) Mit

$$f(\pi, \pi) = 0 \tag{50}$$
$$\partial_x f(\pi, \pi) = \partial_y f(\pi, \pi) = 1 \tag{51}$$
$$\partial_x^2 f(\pi, \pi) = \partial_y^2 f(\pi, \pi) = \partial_x \partial_y f(\pi, \pi) = 0 \tag{52}$$

folgt

$$f(x, y) = (x - \pi) + (y - \pi) = x + y - 2\pi \tag{53}$$

(b) Entwickeln Sie die Funktion f bis zur dritten Ordnung um $(0, 0)$.
Mit

$$f(0, 0) = 0 \tag{54}$$
$$\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 1 \tag{55}$$
$$\partial_x^2 f(0, 0) = \partial_y^2 f(0, 0) = \partial_{xy} f(0, 0) = 0 \tag{56}$$
$$\partial_x^3 f(0, 0) = \partial_y^3 f(0, 0) = \partial_{xxy} f(0, 0) = \partial_{xyy} f(0, 0) = 0 \tag{57}$$
$$\tag{58}$$

folgt

$$f(x, y) = x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 \tag{59}$$

(c) Wie lautet die Hesse-Matrix von f am Punkt $(-\pi/4, -\pi/4)$.

$$H_f(-\pi/4, -\pi/4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{60}$$

Sei nun $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y, z) = f(x, y + z)$

(d) Entwickeln Sie die Funktion g bis zur ersten Ordnung um $(0, 0, 0)$.
Mit $g(x, y, z) = \sin(x + y + z)$ folgt:

$$g(x, y, z) \approx x + y + z \tag{61}$$

(e) Wie viel Polynome dritter Ordnung hat die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von g um $(0, 0, 0,)$?
Es gibt folgende Terme:

$$x^3, y^3, z^3, x^2 y, x^2 z, y^2 x, y^2 z, z^2 x, z^2 y, xyz = \text{ 10 Terme} \tag{62}$$

(f) Wie lautet die Hesse-Matrix von g am Punkt $(0, 0, 2\pi)$. Man erhaelt:

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

Aufgabe 14 (Gelichungssystem)**.** Sei

$$f_1(t, x, y) = \ln(x) + y^2 t - 4 \tag{64}$$
$$f_2(t, x, y) = x^2 + yt^2 + t2 \tag{65}$$

fuer $t, x, y \in \mathbb{R}\ \ x > 0$. Im Punkt $P = (1, 1, -2)$ gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$

(a) Die Gleichung $f_1(t, x, y) = 0$ kann offensichtlich nach lokal um P nach y aufgeloest werden. Man erhaelt die Funktion $(z, x) \to \tilde{y}(t, x)$. Berechnen Sie $\mathrm{grad}\tilde{y}(1, 1)$

(b) Der Punkt P ist Loesung des Gleichungssytstems :

$$f_1(t, x, y) = 0 \tag{66}$$
$$f_2(t, x, y) = 0 \tag{67}$$

Dies soll in der Umgebung von P lokal nach x und y aufgeloest werden. Die invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu ueberprueft werden?

Loesung 14. **(a)** Man erhaelt :

$$\mathrm{grad}\tilde{y}(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial_t f}{\partial_y f} \\ -\frac{\partial_x f}{\partial_y f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{68}$$

(b) Es muss gelten:

$$M = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

Aufgabe 15 (Zweite Ableitung)**.** Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y) = 0$ eine implizite Funktion, die nach $y = g(x)$ aufloesbar ist. Die Ableitung ist gegeben durch:

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(x, g(x)) \tag{70}$$

Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung g'' durch:

$$g''(x) = -\frac{1}{\partial_g f} \left(\partial_x^2 f - \frac{2\, \partial_x f\ \partial_{xg} f}{\partial_g f} + \frac{\partial_g^2 f\ (\partial_x f)^2}{(\partial_g f)^2} \right) \tag{71}$$

gegeben ist.

Loesung 15. Ausgehend von:

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad \Big| \frac{d}{dx} \tag{72}$$

$$\frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \frac{d}{dx} 0 = 0 = \partial_x f + \partial_g f \; \partial_x g \tag{73}$$

$$\tag{74}$$

differenzieren wir erneut total nach x:

$$0 = \partial_x f + \partial_g f \; \partial_x g \qquad \Big| \frac{d}{dx} \tag{75}$$

$$0 = \partial_x^2 f + \partial_{xg} f \; \partial_x g + \partial_{xg} f \; \partial_x g + \partial_g f \; \partial_x^2 g + (\partial_y^2 f \; \partial_x g + \partial_x f \; \underbrace{\partial_{gx} g}_{=0}) \; \partial_x g \tag{76}$$

$$= \partial_x^2 f + 2\partial_{xg} f \; \partial_x g + \partial_g f \; \partial_x^2 g + \partial_g^2 f \; (\partial_x g)^2 \tag{77}$$

Nach $\partial_x^2 g$ aufloesen und fuer $\partial_x g$ die Definition aus der Aufgabe einsetzen ergibt:

$$g''(x) = \partial_x^2 g = -\frac{1}{\partial_g f} \left(\partial_x^2 f - \frac{2\partial_{xy} f \; \partial_x f}{\partial_y f} + \frac{\partial_y^2 f \; (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^2} \right) \tag{78}$$

Aufgabe 16. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4 - a \, \|\mathbf{x}\|^2 + x_1^2 \quad \text{mit}\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Berechnen Sie die kritischen Punkte und charakterisieren Sie diese in Abhängigkeit von a.

Loesung 16. Stationäre Punkte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x((x^2 + y^2) - a + 1) \\ 2y(2(x^2 + y^2) - a) \end{pmatrix} = 0$$

- Fall 1: $x_1 = 0 \land y_1 = 0$
- Fall 2: $x_2 = 0 \land (2(x_2^2 + y_2^2) - a) = 0$

$$\Leftrightarrow y_2 = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow \text{für} \quad \boxed{a > 0}$$

- Fall 3: $(2(x_2^2 + y_2^2) - a + 1) = 0 \wedge y = 0$

$$\Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{a-1}{2}} \Rightarrow \text{für} \quad \boxed{a > 1}$$

- Fall 4: $(2(x_2^2 + y_2^2) - a + 1) = 0 \wedge (2(x_2^2 + y_2^2) - a) = 0 \Rightarrow$ keine Lösung
  Für die Hessematrix ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2(6x^2 + 2y^2 - a + 1) & 8xy \\ 8xy & 2(2x^2 + 6y^2 - a) \end{pmatrix}$$

Charakterisierung der stationären Punkte:

- Fall 1: a beliebig $\Rightarrow P_1(0,0)$

$$\det(H_f(0,0)) = 4a(a-1) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad a > 1 \quad (\text{mit} \quad f_{xx} < 0) \quad (lokales Maximum) \\ = 0 & \text{für} \quad a = 1 \quad (\text{mit} \quad f_{xx} = 0) \quad (siehe Fall 4) \\ < 0 & \text{für} \quad 0 < a < 1 \quad (\text{mit} \quad f_{xx} > 0) \quad (Sattelpunkt) \end{cases}$$

- Fall 2: $a > 0 \Rightarrow P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}}) \wedge P_1$:

$$\det(H_f(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})) = 8a > 0 \quad \text{mit } f_{xx} > 0 \text{ ist } P_2 \text{ ein lokales Minimum}$$

- Fall 3: $a > 1 \Rightarrow P_3(\pm\sqrt{\frac{a-1}{2}}, 0) \wedge P_2 \wedge P_1$

$$\det(H_f(\pm\sqrt{\frac{a-1}{2}}, 0)) = 8(1-a) < 0$$

- Fall 4: $a = 1 \Rightarrow P_1 \wedge P_2$

$$\text{Problem:} \quad \det(H_f(0,0)) = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage}$$

  Um trotzdem zu testen um welche Art von stationären Punkt es sich handelt, betrachten wir $f(x,y) - f(0,0)$ in der Nähe von $(0,0)$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \epsilon\cos(\phi) \\ \epsilon\sin(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \epsilon \text{ hinreichend klein}$$

$$\Delta = f(\epsilon\cos(\phi), \epsilon\sin(\phi)) - f(0,0) = \epsilon^2(\epsilon^2 \underbrace{-1 + \cos(\phi)}_{[0,-2]})$$

  Für $\phi = 0$ folgt $\Delta > 0$ und für $\phi = \pi$ ist $\Delta < 0$, d.h für $a = 1$ ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt Zusammen:

$a < 0$: $P_1(0,0)$ Minimum

$o < a < 1$: $P_1(0,0)$ Sattelpunkt, $P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})$ Minimum

$a = 1$: $P_1(0,0)$ Sattelpunkt, $P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})$ Minimum

$a > 1$: $P_1(0,0)$ Maximum, $P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})$ Minimum, $P_3(\pm\sqrt{\frac{a-1}{2}}, 0)$ Sattelpunkt

Aufgabe 17. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$

Diskutieren Sie $f(x,y)$ (Periodizität, Nullstellen) und bestimmen Sie lokale Minima, lokale Maxima und Sattelpunkte. (Betrachten Sie zuerst die Periodizität und schränken Sie so den zu untersuchenden Bereich ein.)

Loesung 17. Da $\sin(x)$ 2π-periodisch ist gilt:

$$f(x+2\pi, y) = f(x,y) = f(x, y+2\pi)$$

Es reicht also den Breich $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$ zu untersuchen.
Nullstellen: $0 = \sin(x)\sin(y)$

$$\Rightarrow x = n\pi \vee y = m\pi \quad n, m = 0, 1, ...$$

Kritische Punkte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix} = 0$$

Fall 1: $\sin(y) = 0 \wedge \sin(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \wedge y = l\pi \Leftrightarrow P_1(k\pi, l\pi)$$

Fall 2: $\cos(y) = 0 \wedge \cos(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \wedge y = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow P_2(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$$

Charakterisierung der kritischen Punkte:

$$\det H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} = \sin(x)^2 - \cos(y)^2$$

(x,y)	$\det H_f(x,y)$	$f_{xx}(x,y)$	Typ
$(0,0)$	-1		Sattelpunkt
$(\pi,0)$	-1		Sattelpunkt
$(0,\pi)$	-1		Sattelpunkt
(π,π)	-1		Sattelpunkt
$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	1	-1	lokales Maximum
$(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	1	1	lokales Minimum
$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	1	1	lokales Minimum
$(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	1	-1	lokales Maximum