Ferienkurs der TU München- - Analysis 2

Funktionen in mehreren Variablen

Lösung

Jonas J. Funke

30.08.2010 - 03.09.2010

1 Warm up - partielles Differenzieren

Aufgabe 1 (Potentialkasten)**.** Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\Psi(x,y,z) = \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) \text{ mit } n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Potentialkasten löst:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

und berechnen Sie die möglichen Energieniveaus E_{n_x,n_y,n_z}.

Aufgabe 2 (Wellengleichung)**.** Sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(t,x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

die Wellengleichung

$$\partial_t^2\Psi(t,x) = c^2\partial_x^2\Psi(t,x)$$

erfüllt.

Aufgabe 3 (Richtungsableitung)**.** Gegeben ist

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{x_0} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \tag{1}$$

Bestimme die Richtungsableitung in $\mathbf{x_0}$ in Richtung $\mathbf{v_1} = (3,4)^T$ und $\mathbf{v_2} = (1,-1)^T$.
Wie gross ist die maximale und minimale Steigung?

2 Taylorentwicklung

Aufgabe 4 (Taylorentwicklung)**.** Gegeben sei eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $\Psi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, die im Ursprung einen kritischen Punkt hat. Außerdem gilt:

$$\Psi(\mathbf{0}) = \pi \quad \partial_2^2\Psi(\mathbf{0}) = 2 \quad \partial_1^2\Psi(\mathbf{0}) = 4 \quad \partial_1\partial_2\Psi(\mathbf{0}) = 0 \tag{2}$$

Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung in $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$

Aufgabe 5 (Taylorentwicklung)**.** Gegeben sei eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Es gilt:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{0}) = 2 \quad \partial_x f(\mathbf{0}) f(\mathbf{0}) = -3 \quad \partial_x\partial_y f(\mathbf{0}) = 2 \\ \partial_x^2 f(\mathbf{0}) = 1 \quad \partial_x^2\partial_y f(\mathbf{0}) = \partial_y\partial_x\partial_x f(\mathbf{0}) = 5 \quad \partial_y^3 f(\mathbf{0}) = 6 \end{gathered} \tag{3}$$

Alle nicht angegeben Ableitungen verschwinden.
Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung in $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$

3 Extremwertberechnung

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und chrakterisieren Sie diese.

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$$

Aufgabe 7. Bestimmen sie lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte folgender Funktionen:

(a)

$$f(x, y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$$

(b)

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$$

4 Extremwertberechnung mit NB

Aufgabe 8. Gegeben ist

$$f(x, y, z) = x - y + z \tag{4}$$

und die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\} \tag{5}$$

Bestimmen Sie Maxima und Minima der Funktion f, die auf die Menge M beschränkt ist.

Aufgabe 9. Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ mit $a, b > 0$. Gesucht ist ein achsenparalleles Rechteck innerhalb diese Ellipse mit maximalem Flaecheninhalt. Benutzen Sie die Lagrange-Methode.

5 Implizite Funktionen

Aufgabe 10 (Aufloesbarkeit)**.** Gegeben ist die implizite Gleichung $f(x, y, z) = c$ (mit f stetig partiell differenzierbar und $c = \text{const} \in \mathbb{R}$) und ein Punkt (x_0, y_0, z_0).
Was muss ueberprueft werden, um zu zeigen, dass sich die implizite Gleichung lokal in (x_0, y_0, z_0) nach $y = \tilde{y}(x, z)$ aufloesen laesst?

- ☐ $f(x_0, y_0, z_0) = 0$

- □ $f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- □ $f(x_0, y_0, z_0) = c$
- □ $f(x_0, y_0, z_0) \neq c$
- □ $\partial_x f(x_0, y_0, z_0) = 0$
- □ $\partial_y f(x_0, y_0, z_0) = 0$
- □ $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) = 0$
- □ $\partial_x f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- □ $\partial_y f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- □ $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Geben sie den Gradienten $\mathrm{grad}\tilde{y}(x_0, y_0)$ an.

Aufgabe 11 (Implizite Funktionen)**.** Gegeben ist die implizite Gleichung $f(x, y, z) = x^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^4 = 0$. Ist diese Gleichung lokal an $(-\frac{1}{2}, 1)$ nach $y = \tilde{y}(x)$ aufloesbar? Geben Sie evtl. die Ableitung $\tilde{y}'(-\frac{1}{2})$ an.

Aufgabe 12 (Implizite Funktionen)**.** **(a)** Gegeben ist $f(x, y, z) = x - y^7 + z^3 - x^2 z - 1 = 0$. Zeigen Sie, dass sich diese Gleichung im Punkt $(1, 0, 1)$ lokal nach $z = g(x, y)$ aufloesen laesst. Geben Sie ausserdem die Taylorentwichlung in $(1, 0, 1)$ bis zur ersten Ordnung an.

(b) Gegeben ist die Gleichung:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}y^2(x^2 + 1) - 2yx^2 - 2y = 0 \tag{6}$$

Bestimme den Bereich $U \subset \mathbb{R}$, in dem sich die implizite Gleichung lokal nach $y = g(x)$ laesst.

(c) Gegeben ist

$$f(x, y, z) = 1 - z + e^{-2z} \cos(x - y) = 0 \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass sich f in der Umgebung von $(\pi, 0, 0)$ nach $z = g(x, y)$ aufloesen laesst. Berechnen Sie $\mathrm{grad}g(\pi, 0)$ und geben sie die Taylorentwicklung von g bis zur ersten Ordnung an.
Bestimmen Sie weiterhin einen Normalenvektor der Tangentialebene an $(\pi, 0, 0)$, die durch $f(x, y, z) = 0$ definiert ist.

6 Weitere Aufgaben

Aufgabe 13 (Taylorentwicklung)**.** Gegeben ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(x + y)$

(a) Entwickeln Sie die Funktion f bis zur zweiten Ordnung um (π, π).

(b) Entwickeln Sie die Funktion f bis zur dritten Ordnung um $(0, 0)$.

(c) Wie lautet die Hesse-Matrix von f am Punkt $(-\pi/4, -\pi/4)$?

Sei nun $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y, z) = f(x, y + z)$

(d) Entwickeln Sie die Funktion g bis zur ersten Ordnung um $(0, 0, 0)$.

(e) Wie viel Polynome dritter Ordnung hat die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von g um $(0, 0, 0,)$?

(f) Wie lautet die Hesse-Matrix von g am Punkt $(0, 0, 2\pi)$.

Aufgabe 14 (Gelichungssystem)**.** Sei

$$f_1(t, x, y) = \ln(x) + y^2 t - 4 \tag{8}$$
$$f_2(t, x, y) = x^2 + yt^2 + t2 \tag{9}$$

fuer $t, x, y \in \mathbb{R} \;\; x > 0$. Im Punkt $P = (1, 1, -2)$ gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$

(a) Die Gleichung $f_1(t, x, y) = 0$ kann offensichtlich nach lokal um P nach y aufgeloest werden. Man erhaelt die Funktion $(z, x) \to \tilde{y}(t, x)$. Berechnen Sie grad$\tilde{y}(1, 1)$

(b) Der Punkt P ist Loesung des Gleichungssytstems :

$$f_1(t, x, y) = 0 \tag{10}$$
$$f_2(t, x, y) = 0 \tag{11}$$

Dies soll in der Umgebung von P lokal nach x und y aufgeloest werden. Die invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu ueberprueft werden?

Aufgabe 15 (Zweite Ableitung)**.** Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y) = 0$ eine implizite Funktion, die nach $y = g(x)$ aufloesbar ist. Die Ableitung ist gegeben durch:

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(x, g(x)) \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung g'' durch:

$$g''(x) = -\frac{1}{\partial_g f} \left(\partial_x^2 f - \frac{2\, \partial_x f\ \partial_{xg} f}{\partial_g f} + \frac{\partial_g^2 f\ (\partial_x f)^2}{(\partial_g f)^2} \right) \tag{13}$$

gegeben ist.

Aufgabe 16. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4 - a\,\|\mathbf{x}\|^2 + x_1^2 \quad \text{mit}\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Berechnen Sie die kritischen Punkte und charakterisieren Sie diese in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 17. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$

Diskutieren Sie $f(x, y)$ (Periodizität, Nullstellen) und bestimmen Sie lokale Minima, lokale Maxima und Sattelpunkte. (Betrachten Sie zuerst die Periodizität und schränken Sie so den zu untersuchenden Bereich ein.)