Lösungen zu Kapitel 2

Aufgabe 1: (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist obere Dreiecksmatrix. Daher kann man das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4)$ ganz einfach berechnen als Produkt der Diagonalelemente

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3(-1-\lambda)$$

Die Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ mit $\alpha_2 = 1$.
Wegen $\gamma_2 \leq \alpha_2 = 1$ gibt es 1 Jordankästchen der Größe 1 zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Der dazugehörige Eigenvektor v_2 liegt im Eigenraum $\mathcal{E}(-1) = \ker(A + E_4)$. Das Gaussverfahren liefert

$$A + E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man liest ab

$$\mathcal{E}(-1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und wählt als Eigenvektor etwa $v_2 = (0, -2, 3, 2)$.
Über die Größe und Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ kann vorerst keine Aussage gemacht werden. Man bestimmt daher zunächst den Eigenraum $\mathcal{E}(1)$.

$$A - E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus man sofort sieht

$$\mathcal{E}(1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 ist daher $\gamma_1 = 1$, ein Eigenvektor ist $v_1 = (1,0,0,0)$. Es gibt also 1 JORDANkästchen der Länge 3 zu λ_1.
Man benötigt daher zur Angabe der Transformationsmatrix noch einen Hauptvektor 1. und 2. Stufe, welche sich durch Lösen folgender Gleichungssysteme ergeben.

(a) Hauptvektor 1. Stufe

$$(A - E_4)h_1^{(1)} = v_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat den Lösungsraum $\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$.

Man wähle z.B. $h_1^{(1)} = (0, \frac{1}{4}, 0, 0)$.

(b) Hauptvektor 2. Stufe

$$(A - E_4)h_1^{(2)} = h_1^{(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 0 & 2 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit dem Lösungsraum $\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{16}\\\frac{1}{8}\\0\end{pmatrix}$.

Wähle z.B. $h_1^{(2)} = (0, -\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, 0)$.

Dann gilt $A = TJT^{-1}$ mit

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & h_1^{(1)} & h_1^{(2)} & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Matrixexponential von J berechnet man nach der Regel für Blockmatrizen

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \\ & e^{tJ_2} \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$e^{tJ_1} = e^{t(E_3+N)} = e^t e^{tN} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

und

$$e^{tJ_2} = \begin{pmatrix} e^{-t} \end{pmatrix}$$

also

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

(b) $(*)$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist wieder in oberer Dreiecksgestalt.

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_5) = (2-\lambda)^3(-1-\lambda)^2$$

B hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit $\alpha_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ mit $\alpha_2 = 2$.

Der Eigenraum $\mathcal{E}(2) = \ker(B - 2E_5)$ ergibt sich aus

$$B - 2E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und ist $\mathcal{E}(2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es folgt $\gamma_1 = 1$ und ein Eigenvektor $v_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$. Damit gibt es 1 Jordanblock zum Eigenwert λ_1 der Größe 3. Berechne nun Hauptvektor 1. Stufe aus $(B - 2E_5)h_1^{(1)} = v_1$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 3 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit Lösungsraum $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wähle daher $h_1^{(1)} = (0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)$.

Hauptvektor 2. Stufe: $(B - 2E_5)h_1^{(2)} = h_1^{(1)}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 8 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungsraum $\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{21}\\\frac{1}{21}\\0\\0\end{pmatrix}$. Wähle $h_1^{(2)}=(0,-\frac{1}{21},\frac{1}{21},0,0)$.

Nun zum Eigenraum $\mathcal{E}(-1)=\ker(B+E_5)$.

$$B+E_5=\begin{pmatrix}3&3&3&1&8\\0&3&7&2&8\\0&0&3&5&4\\0&0&0&0&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&-4&-1&0\\0&3&7&2&0\\0&0&3&5&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Damit $\mathcal{E}(-1)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}-\frac{17}{9}\\\frac{29}{9}\\-\frac{5}{3}\\1\\0\end{pmatrix}=\mathbb{C}\begin{pmatrix}-17\\29\\-15\\9\\0\end{pmatrix}$. Es folgt sofort $\gamma_2=1$ und $v_2=(-17,29,-15,9,0)$ ist Eigenvektor. Es gibt also 1 Jordanblock der Größe 2 zu λ_2.

Finde Hauptvektor 1. Stufe: $(B+E_5)h_2^{(1)}=v_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}3&3&3&1&8&-17\\0&3&7&2&8&29\\0&0&3&5&4&-15\\0&0&0&0&-4&9\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}3&3&3&1&0&1\\0&3&7&2&0&47\\0&0&3&5&0&-6\\0&0&0&0&-4&9\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

mit Lösungen in $\mathbb{C}\begin{pmatrix}-17\\29\\-15\\9\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-18\\\frac{61}{3}\\-2\\0\\-\frac{9}{4}\end{pmatrix}$. Wähle $h_2^{(1)}=(-18,\frac{61}{3},-2,0,-\frac{9}{4})$.

Damit ist $B=SJS^{-1}$ mit

$$S=\begin{pmatrix}v_1&h_1^{(1)}&h_1^{(2)}&v_2&h_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-17&-18\\0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{21}&29&\frac{61}{3}\\0&0&\frac{1}{21}&-15&-2\\0&0&0&9&0\\0&0&0&0&-\frac{9}{4}\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

Das Matrixexponential ist

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \\ & e^{tJ_2} \end{pmatrix}$$

mit

$$e^{tJ_1} = e^{t(2E_3+N_1)} = e^{2t}e^{tN_1} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{tJ_2} = e^{t(-E_2+N_2)} = e^{-t}e^{tN_2} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & & \\ & e^{2t} & te^{2t} & & \\ & & e^{2t} & & \\ & & & e^{-t} & te^{-t} \\ & & & & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Es handelt sich um ein System 1. Ordnung mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Daher ist der Lösungsraum 2-dimensional.

(c) Die AWA $y' = Ay$, $y(0) = v = (1,0)$ hat die eindeutige Lösung $y(t) = e^{tA}y(0)$.
A ist symmetrisch ($A^T = A$). Daher existiert eine ONB aus Eigenvektoren, sodass $A = ODO^T$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Die Eigenwerte von A ergeben sich aus

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0$$

und sind $\lambda_1 = 0$ ($\alpha_1 = 1$) und $\lambda_2 = 2$ ($\alpha_2 = 1$).
Die Eigenräume sind $\mathcal{E}(0) = \ker(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{E}(2) = \ker(A - 2E_2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Normierte Eigenvektoren sind daher $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Setze $O = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist $O^{-1} = O^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und es gilt

$$A = O\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}O^T$$

Das Matrixexponential ist damit

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= O\begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} O^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{2t} & 1-e^{2t} \\ 1-e^{2t} & 1+e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und die AWA wird gelöst durch

$$y(t) = e^{tA}y(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{2t} \\ 1-e^{2t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Man berechnet leicht

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A, \qquad A^4 = -A^2$$

usw. also $A^0 = E_3$, $A^{2n} = (-1)^{n+1}A^2$ für $n \geq 1$ und $A^{2n+1} = (-1)^n A$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (Induktion!). Damit gilt

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= E_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}(-1)^{n+1}A^2}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}(-1)^n A}{(2n+1)!} \\
&= E_3 - A^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - 1\right) + A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= E_3 + A^2 - A^2\cos t + A\sin t \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dann ist

$$y(t) = e^{tA}y(0) + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} + e^{tA}\int_0^t \begin{pmatrix}\cos s\\ \sin s\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{d}s$$
$$= \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t & \sin t & 0\\ -\sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t\\ 1-\cos t\\ 0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2\sin t\\ 2\cos t - 1\\ 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: $\dot{\chi} = A\chi$ mit $A = \omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ und $\chi(1) = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

Berechne e^{tA}. Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ mit den Eigenräumen $\mathcal{E}(i) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}$ und $\mathcal{E}(-i) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$.

Damit ist $A = UDU^{-1}$, $U = \begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}i\omega & 0\\ 0 & -i\omega\end{pmatrix}$ und

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -1 & -i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 1\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

Man erhält

$$e^{tA} = U\begin{pmatrix}e^{i\omega t} & 0\\ 0 & e^{-i\omega t}\end{pmatrix}U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & -i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\\ i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) & e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

Die Lösung der AWA ist

$$\chi(t) = e^{(t-1)A}\chi(1) = \begin{pmatrix}\cos\omega(t-1) & \sin\omega(t-1)\\ -\sin\omega(t-1) & \cos\omega(t-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\cos\omega(t-1)\\ -\sin\omega(t-1)\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: $A = \begin{pmatrix}3 & 4 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3$$

Die Matrix besitzt also den dreifachen Eigenwert $\lambda = 2$ ($\alpha = 3$).

Für den Eigenraum findet man

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\mathcal{E}(2) = \ker(A - 2E_3) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die geometrische Vielfachheit ist daher $\gamma = 1$, ein Eigenvektor ist $v = (1, -1, 1)$. Es gibt daher 1 JORDANblock der Größe 3 zum Eigenwert $\lambda = 2$.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist die JORDANsche Normalform von A. Für eine vollständige JORDANbasis müssen noch ein Hauptvektor 1. und 2. Stufe gefunden werden. Es gilt $(A-2E_3)h^{(1)} = v$ mit der Lösung $h^{(1)} \in \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wähle daher $h^{(1)} = (1, 0, 0)$.

Weiter gilt $(A - 2E_3)h^{(2)} = h^{(1)}$ mit Lösung $h^{(2)} \in \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wähle $h^{(2)} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$.

Damit ist $A = SJS^{-1}$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zur Lösung kann man nun entweder $y(t) = e^{tA}y(0)$ gemäß

$$y(t) = Se^{tJ}S^{-1}y(0)$$

berechnen (zur Kontrolle: $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$), oder man wechselt in die JORDANbasis von A. Dazu muss man $y(0)$ nach der Basis $\{v, h^{(1)}, h^{(2)}\}$ entwickeln: $y(0) = \alpha_1 v + \alpha_2 h^{(1)} + \alpha_3 h^{(2)}$. Löse also das Gleichungssystem $y(0) = S\alpha$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Es ist also $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit

$$e^{tJ}\alpha = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 3^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+4t+2t^2) \\ e^{2t}(4+4t) \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

In der Standardbasis des $\mathbb{C}^3$ gilt dann

$$\begin{aligned} e^{tA}y(0) &= e^{2t}(1+4t+2t^2)v + e^{2t}(4+4t)h^{(1)} + 4e^{2t}h^{(2)} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t}(1+8t+2t^2) \\ e^{2t}(1-4t-2t^2) \\ e^{2t}(1+4t+2t^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Die DGL $\ddot{q} = -\alpha\dot{q} + \beta$ ist äquivalent zu $\dot{x} = -\alpha x + \beta$ mit $x = \dot{q}$. Es gilt dann

$$x(t) = e^{-\alpha t}\underbrace{x(0)}_{=0} + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\beta(s)\,\mathrm{d}s = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\beta(s)\,\mathrm{d}s$$

also

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\cos\omega s\,\mathrm{d}s = e^{-\alpha t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{s(\alpha+i\omega)}\,\mathrm{d}s \\ &= e^{-\alpha t}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{t(\alpha+i\omega)}-1}{\alpha+i\omega}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-\alpha t}}{\alpha+i\omega}\right) \\ &= \mathrm{Re}\frac{(e^{i\omega t}-e^{-\alpha t})(\alpha-i\omega)}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t-\alpha e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2} \end{aligned}$$

$q(t)$ ergibt sich aus Integration von $x(t)$ nach t. Dabei müssen $\omega = 0$ und $\omega \neq 0$ unterschieden werden.

Fall 1: $\omega = 0$, also $x(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$ und damit

$$q(t) = q(0) + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = \frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha t} - 1\right)$$

Fall 2: $\omega \neq 0$. Dann

$$q(t) = q(0) + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t - \cos\omega t + e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}$$

Fall 1 ergibt sich im Limes $\omega \to 0$.

Aufgabe 7: Die DGL $y'''(x) + y(x) = 0$ hat das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + 1$ mit den drei komplexen Nullstellen

$$z_1 = -1, \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \qquad z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

Ein komplexes Fundamentalsystem ist damit

$$\left\{e^{-x}, e^{x\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}, e^{x\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right\}$$

Durch Real- und Imaginärteilbildung kommt man zu einem reellen Fundamentalsystem

$$\left\{e^{-x}, e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'''(x) + y(x) = e^x$ erhält man durch den Ansatz $y(x) = Ae^x$. Einsetzen liefert

$$Ae^x + Ae^x = e^x$$

also $A = \frac{1}{2}$. Die Partikulärlösung ist $y(x) = \frac{1}{2}e^x$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL liegt damit in $\frac{1}{2}e^x + \text{span}\left\{e^{-x}, e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$.

Aufgabe 8: $(*)$ $\ddot{q} = -q + \delta\dddot{q}$

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \delta\lambda^3 - \lambda^2 - 1$$

Kennt man eine Nullstelle $\lambda_1 > \frac{1}{\delta}$, findet man die beiden anderen durch Polynomdivision

$$\begin{array}{rl}
(\delta\lambda^3 - \lambda^2 - 1) & : (\lambda - \lambda_1) = \delta\lambda^2 + (\lambda_1\delta - 1)\lambda + \lambda_1(\lambda_1\delta - 1) \\
\underline{-(\delta\lambda^3 - \lambda_1\delta\lambda^2)} & \\
(\lambda_1\delta - 1)\lambda^2 - 1 & \\
\underline{-(\lambda_1\delta - 1)\lambda^2 - \lambda_1(\lambda_1\delta - 1)\lambda)} & \\
\lambda_1(\lambda_1\delta - 1)\lambda - 1 & \\
\underline{-(\lambda_1(\lambda_1\delta - 1)\lambda - \lambda_1^2(\lambda_1\delta - 1))} & \\
\lambda_1^2(\lambda_1\delta - 1) - 1 = \delta\lambda_1^3 - \lambda_1^2 - 1 = 0 &
\end{array}$$

Die Nullstellen des so erhaltenen quadratischen Polynoms

$$\begin{aligned}
\lambda_{2,3} &= \frac{1}{2\delta}\left(-(\lambda_1\delta - 1) \pm \sqrt{(\lambda_1\delta - 1)^2 - 4\lambda_1\delta(\lambda_1\delta - 1)}\right) \\
&= \frac{1}{2\delta}\left(-(\lambda_1\delta - 1) \pm i\sqrt{(\lambda_1\delta - 1)(3\lambda_1\delta + 1)}\right)
\end{aligned}$$

sind die gesuchten weiteren Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

(b) Zur Abkürzung setze

$$\alpha := -\operatorname{Re}\lambda_2 = \frac{\lambda_1\delta - 1}{2\delta} > 0$$
$$\omega := \operatorname{Im}\lambda_2 = \frac{\sqrt{(\lambda_1\delta - 1)(3\lambda_1\delta + 1)}}{2\delta} > 0$$

Dann ist $\left(e^{\lambda_1 t}, e^{-\alpha t}\cos\omega t, e^{-\alpha t}\sin\omega t\right)$ ein reelles Fundamentalsystem. Die vollständige Lösung der Form

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{-\alpha t}\cos\omega t + A_3 e^{-\alpha t}\sin\omega t$$

mit $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt für $t > 0$, falls $A_1 = 0$ ist.

Aufgabe 9: $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$ $(*)$

(a) $(*)$ ist eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung, daher ist der Lösungsraum 3-dimensional.

(b) Lösungen von $(*)$ sind von der Form $x^l e^{\mu x}$, also kommen nur in Frage

$$y(x) = 0$$
$$y(x) = 2e^{-x}$$

Durch einsetzen sieht man leicht, dass $2e^{-x}$ die DGL $(*)$ löst.

☐ $-\log x$ ☒ 0 ☐ 1 ☒ $2e^{-x}$ ☐ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Das charakteristische Polynom der DGL ist

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 15\lambda + 9$$

hat die Nullstelle $\lambda_1 = -1$ ($2e^{-x}$ ist Lösung, siehe (b)). Man erhält die anderen Nullstellen durch Polynomdivision:

$$(\lambda^3 + 7\lambda^2 + 15\lambda + 9) : (\lambda + 1) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$

Man hat also

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 3)^2$$

Das charakteristische Polynom hat die einfache NST $\lambda_1 = -1$ und die doppelte NST $\lambda_{2,3} = -3$. Das Fundamentalsystem ist daher $\{e^{-x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}$.

(d) Man errät leicht eine partikuläre Lösung von $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ durch den Ansatz $y(x) = \text{const} = c$. Einsetzen liefert $9c = 3$, also $c = \frac{1}{3}$. Damit ist die allgemeine Lösung

$$y \in \frac{1}{3} + \operatorname{span}\left\{e^{-x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\right\}$$

Aufgabe 10: Separierbare Differentialgleichungen

(a) $y'x = 2y$.
Man sieht sofort, dass $y(x) = 0$ die DGL löst.
Separation der Variablen und Integration $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}$ liefert

$$\log|y(x)| = 2\log|x| + C$$

und Auflösen

$$y(x) = \pm e^C x^2$$

für $x > 0$ oder $x < 0$. Aus der DGL liest man, dass $y(0) = 0$ für alle Lösungen gelten muss. Somit kommt man auf folgende allgemeine Lösung:

$$y(x) = \begin{cases} c_1 x^2 & , x \geq 0 \\ c_2 x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Man überprüft leicht, dass diese Lösung differenzierbar ist für alle x.

(b) $y' = \frac{2x}{x^2+1} y$.
$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ergibt $\log|y(x)| = \log(x^2+1) + C$, also

$$y(x) = \pm e^C (x^2 + 1)$$

Da auch die Nullfunktion Lösung der DGL ist, kann man die allgemeine Lösung schreiben als

$$y(x) = c(x^2 + 1), \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$.
Die Lösungen sind implizit gegeben durch $\int (y+1)^2\,\mathrm{d}y = -\int x^3\,\mathrm{d}x$, also

$$\frac{1}{3}(y(x)+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C$$

Auflösen liefert

$$y(x) = \sqrt[3]{C - \frac{3}{4}x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R},\, C \in \mathbb{R}$$

Wegen $y'(x) = \frac{1}{3}\left(C - \frac{3}{4}x^4\right)^{-\frac{2}{3}}$ ist für positive C die Lösung bei $x = \pm\left(\frac{4}{3}C\right)^{\frac{1}{4}}$ nicht differenzierbar und der Definitionsbereich von y muss dementsprechend angepasst werden.

Aufgabe 11: $\dot{x} = -|x|^\alpha$, $x(0) = 1$.
Separation ergibt für allgemeines α und $y(x) > 0$

$$t = \int_0^t \mathrm{d}\tau = \int_1^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{-\xi^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{(x(t))^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ -\log(x(t)), & \alpha = 1 \end{cases}$$

(a) $\alpha = 2$:
$$t = -1 + (x(t))^{-1}$$
ergibt aufgelöst nach x(t)
$$x(t) = \frac{1}{1+t}$$
auf dem maximalen Intervall $(-1, \infty)$, das die Anfangszeit $t_0 = 0$ enthält. Jede andere Lösung ist eine Einschränkung dieser Lösung auf ein kleineres Intervall.

(b) $\alpha = 1$:
$$t = -\log(x(t))$$
ergibt aufgelöst
$$x(t) = e^{-t}$$
definiert auf ganz $\mathbb{R}$ da $x(t)$ strikt positiv ist. Bis auf Einschränkung auf kleinere Intervalle ist dies die einzige Lösung der AWA.

(c) $\alpha = \frac{1}{2}$:
$$t = 2 - \sqrt{x(t)}$$
liefert die auf $(-\infty, 2]$ definierte Lösung
$$x(t) = \frac{1}{4}(t-2)^2$$
($x(t)$ muss monoton fallen, da $\dot{x} = -\sqrt{|x|}$). Diese Lösung kann differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden durch die Nullfunktion, da diese die DGL auch löst, also insgesamt
$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-2)^2, & t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$
Aus Symmetriegründen (s. dazu auch das Beispiel aus der Vorlesung) ist auch $-\frac{1}{4}(t-c)^2$ für $t \geq c$, $c \geq 2$ eine Lösung der Differentialgleichung. Man erhält daher eine ganze Schar von Lösungen, nämlich
$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-2)^2, & t \leq 2 \\ 0, & 2 < t \leq c \\ -\frac{1}{4}(t-c)^2, & t > c \end{cases}$$

Aufgabe 12: $yy' = x(1-y^2)$, $y(0) = y_0$.

(a) $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\eta}{1-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta = \int_0^x \xi\,\mathrm{d}\xi$ ergibt
$$-\frac{1}{2}\log|1-y(x)^2| + \frac{1}{2}\log|1-y_0^2| = \frac{1}{2}x^2$$
Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten liefert
$$|1-y(x)^2| = e^{-x^2}|1-y_0^2|$$

Da bei der Integration nicht über die Polstellen $y = \pm 1$ integriert werden darf, haben $1 - y(x)^2$ und $1 - y_0^2$ im betrachteten Bereich dasselbe Vorzeichen und es gilt

$$1 - y(x)^2 = e^{-x^2}(1 - y_0)^2$$

also

$$y(x) = \pm\sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}$$

Der Radikand ist dabei stets positiv. Für $y_0 > 0$ ist dann $y(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}$ Lösung der AWA, für $y_0 < 0$ die negative Lösung.

(b) Konstante Lösungen ergeben sich aus der Bedingung $y' = 0$. Dies gilt (siehe DGL), falls $y(x) = \pm 1$. Es gibt also 2 konstante Lösungen der AWA.

(c) Für $y_0 = 0$ sind $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ die einzigen zwei Lösungen auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\lim\limits_{x \to 0} y_\pm(x) = 0$. Da Für kleine x gilt $y_\pm(x) \approx \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$, gibt es genau zwei auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Lösungen mit $y(0) = 0$, nämlich

$$y_1(x) = \begin{cases} y_+(x), & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ y_-(x), & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad y_2(x) = -y_1(x)$$