Ferienkurs der TU München- - Analysis 2

Fourierreihen und Taylorreihen

Lösung

Marcus Jung, Jonas J. Funke

30.08.2010

1 Fourierreihen

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $2\pi-$periodisch mit Fourierkoeffizienten f_k, wobei $f_0 = 0$. F sei eine Stammfunktion zu f. Zeigen Sie, dass fuer die Fourierkoeffizienten F_k von F gilt:

$$F_k = \frac{f_k}{ik} \quad k \neq 0 \tag{1}$$

Loesung 1. Fuer die Fourierkoeffizienten F_k gilt ($k \neq 0$):

$$\begin{aligned}
F_k &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi}\, F(x) e^{-ikx} \\
&\underbrace{=}_{\text{partiell Int}} \left[\frac{F(x)}{2\pi}\, \frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi}\, F'(x)\, \frac{e^{-ikx}}{-ik} \\
&= \frac{1}{-ik}\, \underbrace{\frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi}}_{=\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} f(x) = f_0} + \frac{1}{ik} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi}\, f(x) e^{-ikx}}_{=f_k} \\
&= \frac{1}{-ik}\, \underbrace{f_0}_{=0} + \frac{1}{ik} f_k = \frac{1}{ik}\, f_k
\end{aligned} \tag{2}$$

Alternativlsg:
Da f stetig und periodisch ist, konvergiert die Fourierreihe gleichmaeßig. Daraus folgt, dass Summen und Integrale vertauscht werden duerfen:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int dx\ f(x) \\
&= \int dx\ \sum_k f_k\ e^{ikx} \\
&= \sum_k f_k\ \int dx\ e^{ikx} \\
&= \sum_k f_k\ \frac{e^{ikx}}{ik} \\
&= \sum_k \frac{f_k}{ik} e^{ikx}
\end{aligned} \tag{3}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit $F(x) = \sum_k F_k\ e^{ikx}$ erhaelt man die gesuchte Relation.

Aufgabe 2. Man zeige, dass $g_n = e^{int}$ ein vollstaendiges Orthonormalsystem fuer 2π-periodische Funktionen bilden, d.h.:

$$\langle g_n, g_m \rangle = \delta_{nm} \tag{4}$$

Loesung 2.

$$\begin{aligned}\langle g_n, g_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi}\ e^{i(m-n)t} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} dt\ \cos((m-n)t) + i\int_0^{2\pi} dt\ \sin((m-n)t)\right]\end{aligned} \tag{5}$$

Da fuer $n \neq m$:

$$\int_0^{2\pi} dt\ \cos((m-n)t) = 0 \ \text{ und } \ \int_0^{2\pi} dt\ \sin((m-n)t) = 0 \tag{6}$$

und fuer $n = m$:

$$\int_0^{2\pi} dt\ \cos((m-n)t) = 2\pi \ \text{ und } \ \int_0^{2\pi} dt\ \sin((m-n)t) = 0 \tag{7}$$

folgt

$$\langle g_n, g_m \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = m \\ 0 & \text{wenn } n \neq m \end{cases} \tag{8}$$

Aufgabe 3 (Periodische Funktionen)**.** Zeige Punkt 5 der Eigenschaften periodischer Funktionen, d.h.

$$\int_0^T dt\ f(t) = \int_a^{a+T} dt\ f(t), \quad a \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Loesung 3. $\int\limits_0^T f(t)dt = \int\limits_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int\limits_{kT}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{(k+1)T} f(t)dt =$
$\int\limits_{(k+1)T}^{a+T} f(\tau)d\tau + \int\limits_{a}^{(k+1)T} f(t)dt = \int\limits_{a}^{a+T} f(t)dt$

Aufgabe 4. Zeige die Äquivalenz komplexer und reeller Schreibweise!

Loesung 4. $f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}[a_k * cos(k\omega t) + b_k * sin(k\omega t)] =$
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{a_k}{2} * (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k}{2i} * (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t})] =$
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{a_k - ib_k}{2} * e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} * e^{-ik\omega t}] = \sum\limits_{k=-n}^{n} \gamma_k * e^{ik\omega t}$

Aufgabe 5. $a_k = 2, b_k = 0$: Ist die Partialsummenfolge $f_n(t)$ für irgendein $t \in \mathbb{R}$ konvergent?

Loesung 5. $f_n(t) = 1 + 2 * cost + 2 * cos(2t) + ... + 2 * cos(nt) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt} =$

- $2n + 1$ für $t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\frac{sin[(n+\frac{1}{2})t]}{sin(\frac{t}{2})}, \quad$ sonst

Die Partialsummenfolge $f_n(t)$ ist daher für kein $t \in \mathbb{R}$ konvergent $(n \to \infty)$

Aufgabe 6. Beweise: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T periodische Funktion, dann gilt:

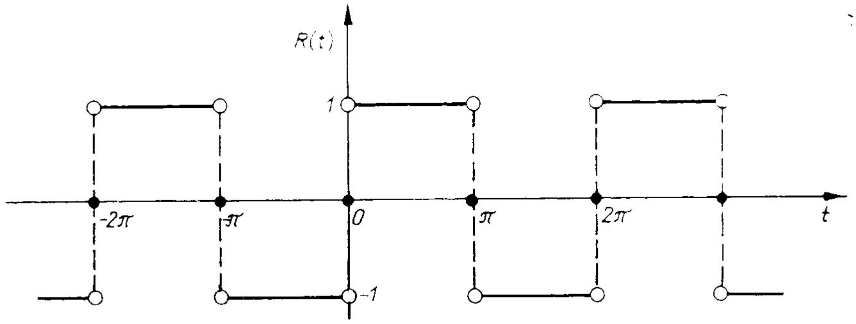
- $f(t)$ gerade $\to a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t) * cos(k\omega t)dt, \quad b_k = 0$

Loesung 6.

- Mit der Substitution $\tau = -t$ erhält man:
  $b_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t)sin(k\omega t)dt = \frac{2}{T} \int\limits_0^{-T} f(-\tau)sin(k\omega\tau)d\tau =$
  $-\frac{2}{T} \int\limits_{-T}^0 f(\tau)sin(k\omega\tau)d\tau = -\frac{2}{T} \int\limits_0^T f(\tau)sin(k\omega\tau)d\tau = -b_k$

- $a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt =$
  $\frac{2}{T}[\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)cos(k\omega t)dt + \int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)cos(k\omega t)dt] =$
  $\frac{2}{T}[\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(-\tau)cos(k\omega\tau)d\tau + \int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)cos(k\omega t)dt] =$
  $\frac{4}{T} \int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)cos(k\omega t)dt$

Aufgabe 7. Gegeben ist die Rechtecksschwingung:
$R(t) = 0, \quad t = 0, t = \pi, t = 2\pi$
$R(t) = 1, \quad 0 < t < \pi$
$R(t) = -1, \quad \pi < t < 2\pi$



Ist die Rechteckschwingung:

- ☐ stetig auf $[0, 2\pi]$
- ☐ stueckweise stetig auf $[0, 2\pi]$
- ☐ stueckweise stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$
- ☐ differenzierbar auf $[0, 2\pi]$

Ist die Fourierreihe zu $R(t)$ auf $[0, 2\pi]$

- ☐ gleichmaessig konvergent
- ☐ punktweise konvergent
- ☐ im quadratischen Mittel konvergent
- ☐ divergent

Berechne die Fourierkoeffizienten!
Zeichne die Approximation!

Loesung 7. ☐ stetig auf $[0, 2\pi]$

☒ stueckweise stetig auf $[0, 2\pi]$

☒ stueckweise stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$

☐ differenzierbar auf $[0, 2\pi]$ (bei $0, \pi, 2\pi$ nicht diffbar)

☐ gleichmaessig konvergent (da $0, \pi, 2\pi, \ldots$ nicht stetig, ist aber gleichmaessig konvergent auf $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ und $[\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ mit $\varepsilon \in]0, \pi[$)

☒ punktweise konvergent (da stueckweise stetig diffbar und periodisch, wobei $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = \ldots = 0$)

☒ im quadratischen Mittel konvergent (da stueckweise stetig)

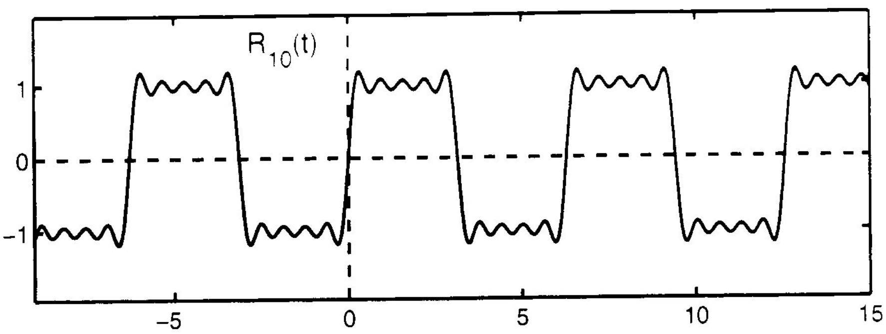
☐ divergent

Hier ist $R(t)$ eine ungerade Funktion und damit: $a_k = 0, \quad k = 0, 1, ...$

$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi sin(kt)dt =$

- $0, \quad k$ gerade
- $\frac{4}{k\pi}, \quad k$ ungerade

Man erhält also $R(t) = \frac{4}{\pi}(\frac{sint}{1} + \frac{sin(3t)}{3} + \frac{sin(5t)}{5} + ...)$.



Aufgabe 8. Es sei $f(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi$ eine $2\pi-$periodische Funktion. Ist $f(t)$:

☐ stetig auf $[-\pi, \pi]$

☐ stueckweise stetig auf $[-\pi, \pi]$

□ stueckweise stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$

□ stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$

Ist die Fourierreihe zu $f(t)$ auf $[-\pi, \pi]$

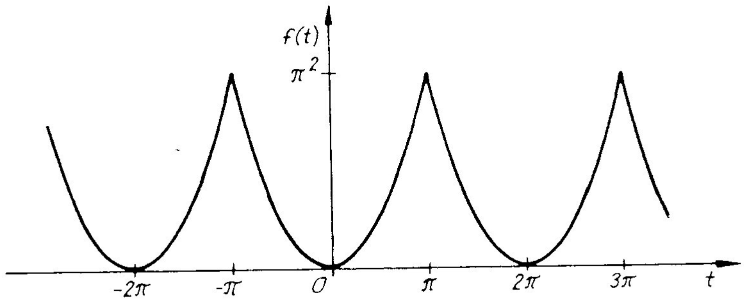
□ gleichmaessig konvergent

□ punktweise konvergent

□ im quadratischen Mittel konvergent

□ divergent

Berechne die Fourierreihe!



Loesung 8. Ist $f(t)$:

☒ stetig auf $[-\pi, \pi]$

☒ stueckweise stetig auf $[-\pi, \pi]$

☒ stueckweise stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$

□ stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$

Ist die Fourierreihe zu $f(t)$ auf $[-\pi, \pi]$

☒ gleichmaessig konvergent

☒ punktweise konvergent

☒ im quadratischen Mittel konvergent

□ divergent

Die Funktion $f(t)$ ist gerade $\rightarrow b_k = 0, \quad k = 1, 2, ...$

$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi t^2 * cos(kt)dt =$

- $\frac{2\pi^2}{3}, \quad k = 0$
- $(-1)^k * \frac{4}{k^2}, \quad k = 1, 2, ...$

Somit erhält man als Fourierreihe:

$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4*cost}{1^2} + \frac{4*cos(2t)}{2^2} - ...$

Aufgabe 9. Berechne die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |sinx|$!

Loesung 9. Die Fourierkoeffizienten sind:

$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |sinx| e^{-inx} dx$

Wegen $e^{-in(x-\pi)} = (-1)^n * e^{-inx}$ folgt $c_n = 0$ für ungerades n.

$c_2k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi sinx * e^{-2kix} dx = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\pi *(e^{ix} - e^{-ix}) * e^{-2kix} dx =$

$- \frac{1}{2\pi} * \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$

$\rightarrow |sinx| = -\frac{1}{2\pi} * \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kix}}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\pi}(2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{cos2kx}{k^2 - \frac{1}{4}})$

Aufgabe 10. Gegeben sei die $2\pi-$ periodische Funktion

$f(x) = x, \quad 0 < x < \pi$

$f(x) = \pi, \quad \pi < x < 2\pi$

- Bestimme die reellen Fourierkoeffizienten!
- Berechne die komplexen Fourierkoeffizienten mithilfe der Transformationsformeln aus dem Skript!
- Bestätige das Ergebnis durch direkte Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten.

Loesung 10.

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) * cos(kx) dx =$

  $\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi x * cos(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_\pi^{2\pi} \pi * cos(kx) dx = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi k^2}$

- $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) * sin(kx) dx =$

  $\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi x * sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_\pi^{2\pi} \pi * sin(kx) dx =$

  $\frac{-19^k}{k} + \frac{-1 + (-1)^k}{k} = \frac{-1}{k}$

- $a_0 = \frac{1}{2}\pi + \pi = \frac{3\pi}{2}$
- Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten mittels Formeln aus dem Skript:
  $c_0 = \frac{3\pi}{4}$
  $c_k = \frac{1}{2} * [(\frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}) - i(\frac{-1}{k})]$
  $c_{-k} = \frac{1}{2} * [(\frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}) + i(\frac{-1}{k})]$
- Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten, direkt:
  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) * e^{-ikx} dx =$
  $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} x * e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\pi}^{2\pi} \pi * e^{-ikx} dx =$
  $\frac{-1+(-1)^k}{2\pi k^2} + i * \frac{1}{2k}$

Aufgabe 11. Welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt die Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{|k|!}, k \in \mathbb{Z}$

Loesung 11. Mit der geometrischen Reihe erhält man:
$f(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|k|!} * e^{ikx} = -1 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} * (e^{ix})^k =$
$-1 + e^{e^{ix}} + e^{e^{-ix}} = -1 + e^{cosx} * (e^{isinx} + e^{-isinx}) = -1 + 2 * e^{cosx} * cos(sinx)$

2 Taylorreihen

Aufgabe 12. Mache eine Taylorentwicklung von $f(x) = sinx$. Wie groß ist der relative Fehler für n=3?

Loesung 12. Mit $\frac{\partial}{\partial x} sinx = cosx, \frac{\partial}{\partial x} cosx = -sinx$ erhält man die folgende Taylorentwicklung von $f(x) = sinx$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:
$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n * \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x)$
$R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{cos\xi}{(2n+3)!} * x^{2n+3}, \quad \xi = \theta * x, \quad 0 < \theta < 1$
Für das Intervall $[\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}], n = 3$ ergibt sich damit folgende Abschätzung für den relativen Fehler:
$|\frac{R_8(x)}{sinx}| \leq \frac{|R_8(x)|}{\frac{3}{\pi} * |x|} \leq \frac{\pi}{9! * 3} * x^8 \leq \frac{\pi}{9! * 3} (\frac{\pi}{6})^8$
$= 1,63 * 10^-8$

Aufgabe 13. Die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens ist gegeben durch:
$E_{rel} = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 * (\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1)$

m_0 ist hier die Ruhemasse und v die Geschwindigkeit des Teilchens, c die Lichtgeschwindigkeit. Wir fragen nach dem Zusammenhang mit der nichtrelativistischen kinetischen Energie $E = \frac{1}{2}m_0v^2$.
Betrachte dazu die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Entwickle dies bis zum Restglied R_3. Was sind die Bedeutungen der einzelnen Terme?

Loesung 13. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} * x^2 + R_3(x)$
$R_3(x) = -\frac{5}{16} * \frac{x^3}{(\sqrt{1+\xi})^7}, \quad \xi = \theta * x, \quad 0 < \theta < 1$
$\rightarrow E_{rel} = m_0c^2 * [\frac{1}{2} * (\frac{v}{c})^2 + \frac{3}{8} * (\frac{v}{c})^4 + O((\frac{v}{c})^6)]$ Der erste Summand ist gerade die nichtrelativistische kinetische Energie, der zweite Summand beschreibt die relativistische Korrektur erster Ordnung.

Aufgabe 14. Bestimme den Grenzwert $\lim_{n\to 0} \frac{x - tanx}{x^3}$ durch Taylorentwicklung von $\tan(x)$ um 0!

Loesung 14. Zunächst berechnet man die Ableitungen von $y = tanx$ und damit die Taylorreihe:
$y = tanx \quad y(0) = 0$
$y' = 1 + tan^2x \quad y'(0) = 0$
$y'' = 2 * tanx(1 + tan^2x) \quad y''(0) = 0$
$y''' = 2 * (1 + 3 * tan^2x)(1 + tan^2x) \quad y'''(0) = 2$
$\rightarrow y = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^5)$
Für den gesuchten Grenzwert erhält man schließlich:
$lim_{x\to 0} \frac{x - tanx}{x^3} = \frac{x - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^5))}{x^3} = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 15. Gegeben sie $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x} \tag{10}$$

Ausserdem ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Taylorreihe um $x_0 = 0$.

(a) Wie lauten die Koeffizienten:

$$\square \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{11}$$
$$\square \quad a_0 = 0 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -3 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = -5 \tag{12}$$
$$\square \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{13}$$
$$\square \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius der Taylorreihe um 0?

(c) Wie lauten die Koeffizienten $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ einer Stammfunktion von f?

$$\square \qquad b_n = a_n \tag{16}$$
$$\square \qquad b_n = n a_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{17}$$
$$\square \qquad b_n = \frac{a_{n-1}}{n} \quad n \in \mathbb{N} \tag{18}$$
$$\square \qquad b_n = (n+1) a_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{19}$$
$$\square \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{n+1} \quad n \in \mathbb{N} \tag{20}$$
$$\tag{21}$$

Loesung 15. (a) Wie lauten die Koeffizienten:

$$\square \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{22}$$
$$\square \quad a_0 = 0 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -3 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = -5 \tag{23}$$
$$\boxtimes \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{24}$$
$$\square \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{25}$$
$$\tag{26}$$

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius der Taylorreihe um 0?
Aus (a) wissen wir, dass

$$f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3} = 2\,\frac{2 \cdot 1}{(1+x)^3} \tag{27}$$

und weiter

$$f^{(3)}(x) = 2\,\frac{-3 \cdot 2 \cdot 1}{(1+x)^4} \tag{28}$$

Dies koennen wir zusammenfassen:

$$f^{(n)}(x) = 2\,\frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 2\,(-1)^n\, n! \tag{29}$$

Damit ergeben sich die Taylorkoeffizienten:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_n = 2\frac{n!}{n!}(-1)^n = 2(-1)^n \text{ fuer } n \geq 2 \tag{30}$$

Es folgt

$$f(x) = 1 - x + 2\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{31}$$

Aus

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \tag{32}$$

folgt $R = 1$;

(c) Wie lauten die Koeffizienten $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ einer Stammfunktion von f?

$$\square \qquad b_n = a_n \tag{33}$$
$$\square \qquad b_n = n a_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{34}$$
$$\boxtimes \qquad b_n = \frac{a_{n-1}}{n} \quad n \in \mathbb{N} \tag{35}$$
$$\square \qquad b_n = (n+1) a_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{36}$$
$$\square \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{n+1} \quad n \in \mathbb{N} \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+1}}{j} x^j \end{aligned} \tag{39}$$

wobei im letzten Schritt $n = j - 1$ substituiert wurde.

Aufgabe 16. Entwickle die Funktion $f(x) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^3}}$ bis einschließlich zur 3.Ordnung um $x_0 = 0$ und gebe eine Schranke für den relativen Fehler an, falls $|x| < \frac{1}{2}$ und die Funktion durch das Taylorpolynom 2. Grades approximiert wird!

Loesung 16. Für die Taylorentwicklung erhält man: $f(x) = 1+2x+x^2+\frac{1}{2}x^3$
Für den relativen Fehler bei Approximation 2. Ordnung erhält man:
$R_{rel} = \frac{|f(x)-T_2(x)|}{|f(x)|} = 0,065$

3 Zusaetzliche Aufgaben

Aufgabe 17. Beweise die Rechenregeln Zeitumkehr und Verschiebung!

Loesung 17.

- $g(t) = f(-t) \rightarrow \hat{g_k} = \hat{f_{-k}}$

$\hat{g_k} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(-t) e^{-ik\omega t} dt = \int\limits_0^{-T} f(t) e^{ik\omega t} dt =$
$\int\limits_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt = \hat{f_{-k}}$

- $g(t) = e^{int} f(t) \to \hat{g_k} = \hat{f_{k-n}}$
  $\hat{g_k} = \int\limits_0^T f(t) e^{in\omega t} * e^{-ik\omega t} dt = \int\limits_0^T f(t) e^{i(k-n)\omega t} dt = \hat{f_{k-n}}$

- $g(t) = f(t+a) \to \hat{g_k} = \hat{f_{k-n}}$
  $\hat{g_k} = \int\limits_0^T f(t+a) e^{-ik\omega t} dt = \int\limits_a^{T+a} f(t) e^{-ik\omega(t-a)} dt =$
  $e^{ik\omega a} \int\limits_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt = e^{ik\omega a} \hat{f}_k$

Aufgabe 18. Gegeben sei die $2\pi -$ periodische Funktion $f(x) = x * cosx$

- Welche Fourierkoeffizienten sind auf jeden fall 0?
- Berechne die Fourierreihe von $f(x)$

Loesung 18.

- $f(x)$ ist eine ungerade Funktion, da $cos(x)$ eine gerade und x eine ungerade Funktion sind. Daher sind die Fourierkoeffizienten a_k alle Null!
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) * sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x * cosx * sin(kx) dx =$
  $-\frac{2k}{k^2-1} \to f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{2k}{k^2-1} sin(kx)$

Aufgabe 19. Bestimme die reellen Fourierkoeffizienten der 2π periodischen Funktion
$f(x) = \frac{1}{\pi} * x^2, \quad 0 < x < \pi$
$f(x) = 2\pi - x, \quad \pi < x < 2\pi$

Loesung 19.

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) * cos(kx) dx =$
  $\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} * cos(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) * cos(kx) dx =$
  $\frac{2*(-1)^k}{\pi k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{3*(-1)^k - 1}{\pi k^2}$

- $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) * sin(kx) dx =$
  $\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} * sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) * sin(kx) dx =$
  $\frac{2+2*(-1)^{k-1}+k^2*(-1)^k*\pi^2}{\pi^2*k^3} + \frac{(-1)^k}{k} =$
  $2 * \frac{1+(-1)^{1+k}+\pi^2*(-1)^k*k^2}{\pi^2*k^3}$

- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx =$
  $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)dx = \frac{8\pi}{3}$

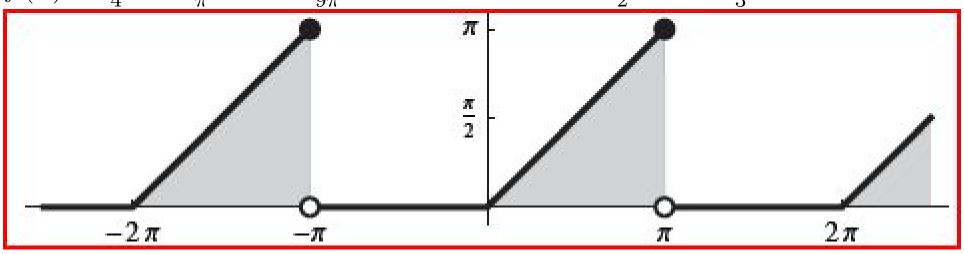
Aufgabe 20. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π periodisch mit $f(x) = \max(0, x)$ für$x \in (-\pi, \pi]$. Bestimme die Fourierkoeffizienten von

- f
- $g = f(-x)$
- $h = f + g$

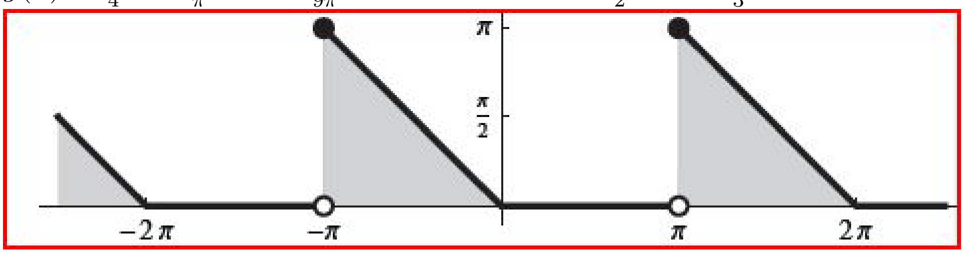
Zeichne den Graphen und gebe die ersten Summanden der Cosinus-Sinus Darstellung an.

Loesung 20.

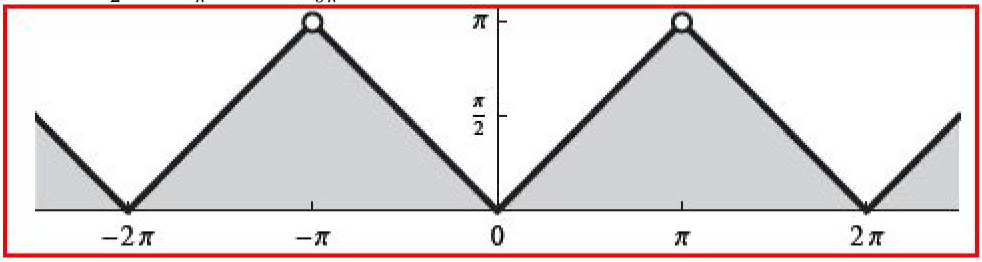
- $\hat{f}_0 = \frac{\pi}{4}$
  $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) * e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} x * e^{-ikx}dx =$
  $\frac{i*(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^k-1}{2\pi k^2}$
- $g(x) = f(2\pi - x) = f(-x)$
  $\to \hat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(-x) * e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) * e^{-i(-k)x}dx = \hat{f_{-k}}$
- $\hat{h_k} = (f \hat{+} g)_k = \hat{f}_k + \hat{g}_k = \hat{f}_k + \hat{f_{-k}} = \frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}$
- $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2*cosx}{\pi} - \frac{2*cos(3x)}{9\pi} - ... + sinx - \frac{sin(2x)}{2} + \frac{sin(3x)}{3} - ...$



- $g(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2*cosx}{\pi} - \frac{2*cos(3x)}{9\pi} - ... - sinx + \frac{sin(2x)}{2} - \frac{sin(3x)}{3} + ..$



- $h(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4*cosx}{\pi} - \frac{4*cos(3x)}{9\pi} - ...$



Aufgabe 21. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^x dt\ e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{40}$$

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung bis zur (einschliesslich) 5. Ordnung um $x_0 = 0$ an.

(b) Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe?

Loesung 21. (a) Man erhaelt $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 \pm \ldots$, entweder durch konsequentes Ableiten oder durch integrieren der Exponentialfunktion $e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{4}$. ($e^{-x^2}$ konvergiert gleichmaessig und damit darf man Summe und Integral vertauschen.)

(b) $R = \infty$, da die Exponentialfunktion den Konvergenzradius ∞ hat und Integration aendert den Konvergenzradius nicht.