Ferienkurs der TU München- - Analysis 2

Fourierreihen und Taylorreihen

Übung

Marcus Jung, Jonas J. Funke

30.08.2010

1 Fourierreihen

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $2\pi-$periodisch mit Fourierkoeffizienten f_k, wobei $f_0 = 0$. F sei eine Stammfunktion zu f. Zeigen Sie, dass fuer die Fourierkoeffizienten F_k von F gilt:

$$F_k = \frac{f_k}{ik} \quad k \neq 0 \tag{1}$$

Aufgabe 2 (Vollstaendigkeit)**.** Man zeige, dass $g_n = e^{int}$ ein vollstaendiges Orthonormalsystem fuer 2π-periodische Funktionen bilden, d.h.:

$$\langle g_n, g_m \rangle = \delta_{nm} \tag{2}$$

Aufgabe 3 (Periodische Funktionen)**.** Zeige Punkt 5 der Eigenschaften periodischer Funktionen, d.h.

$$\int_0^T dt\ f(t) = \int_a^{aT} dt\ f(t), \quad a \in \mathbb{R} \tag{3}$$

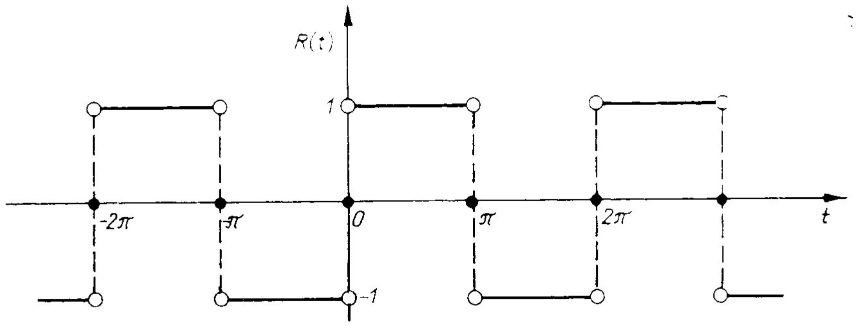
Aufgabe 4. Zeige die Äquivalenz komplexer und reeller Schreibweise!

Aufgabe 5. $a_k = 2, b_k = 0$: Ist die Partialsummenfolge $f_n(t)$ für irgendein $t \in \mathbb{R}$ konvergent?

Aufgabe 6. Beweise: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T periodische Funktion, dann gilt:

- $f(t)$ gerade $\to a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t) * cos(k\omega t)dt, \quad b_k = 0$

Aufgabe 7. Gegeben ist die Rechtecksschwingung:
$R(t) = 0, \quad t = 0, t = \pi, t = 2\pi$
$R(t) = 1, \quad 0 < t < \pi$
$R(t) = -1, \quad \pi < t < 2\pi$



Ist die Rechteckschwingung:

- □ stetig auf $[0, 2\pi]$
- □ stueckweise stetig auf $[0, 2\pi]$
- □ stueckweise stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$
- □ differenzierbar auf $[0, 2\pi]$

Ist die Fourierreihe zu $R(t)$ auf $[0, 2\pi]$

- □ gleichmaessig konvergent
- □ punktweise konvergent
- □ im quadratischen Mittel konvergent
- □ divergent

Berechne die Fourierkoeffizienten!
Zeichne die Approximation!

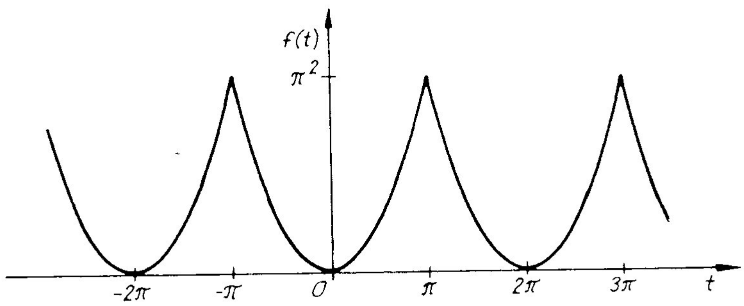
Aufgabe 8. Es sei $f(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi$ eine $2\pi-$periodische Funktion.
Ist $f(t)$:

- □ stetig auf $[-\pi, \pi]$
- □ stueckweise stetig auf $[-\pi, \pi]$
- □ stueckweise stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$
- □ stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$

Ist die Fourierreihe zu $f(t)$ auf $[-\pi, \pi]$

- □ gleichmaessig konvergent
- □ punktweise konvergent
- □ im quadratischen Mittel konvergent
- □ divergent

Berechne die Fourierreihe!



Aufgabe 9. Berechne die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |sinx|$!

Aufgabe 10. Gegeben sei die $2\pi-$ periodische Funktion
$f(x) = x, \quad 0 < x < \pi$
$f(x) = \pi, \quad \pi < x < 2\pi$

- Bestimme die reellen Fourierkoeffizienten!
- Berechne die komplexen Fourierkoeffizienten mithilfe der Transformationsformeln aus dem Skript!
- Bestätige das Ergebnis durch direkte Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten.

Aufgabe 11. Welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt die Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{|k|!}, k \in \mathbb{Z}$

2 Taylorreihen

Aufgabe 12. Mache eine Taylorentwicklung von $f(x) = sinx$. Wie groß ist der relative Fehler für n=3?

Aufgabe 13. Die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens ist gegeben durch:
$E_{rel} = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 * (\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1)$
m_0 ist hier die Ruhemasse und v die Geschwindigkeit des Teilchens, c die Lichtgeschwindigkeit. Wir fragen nach dem Zusammenhang mit der nichtrelativistischen kinetischen Energie $E = \frac{1}{2}m_0v^2$.
Betrachte dazu die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = (1 + x)^{-\frac{1}{2}}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Entwickle dies bis zum Restglied R_3. Was sind die Bedeutungen der einzelnen Terme?

Aufgabe 14. Bestimme den Grenzwert $\lim_{n\to 0} \frac{x-tanx}{x^3}$ durch Taylorentwicklung von $\tan(x)$ um 0!

Aufgabe 15. Gegeben sie $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x} \tag{4}$$

Ausserdem ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Taylorreihe um $x_0 = 0$.

(a) Wie lauten die Koeffizienten:

$$\begin{align}
\square \quad & a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{5}\\
\square \quad & a_0 = 0 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -3 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = -5 \tag{6}\\
\square \quad & a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{7}\\
\square \quad & a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -2 \quad a_4 = 2 \quad a_5 = -2 \tag{8}\\
& \tag{9}
\end{align}$$

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius der Taylorreihe um 0?

(c) Wie lauten die Koeffizienten $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ einer Stammfunktion von f?

$$\begin{align}
\square \qquad & b_n = a_n \tag{10}\\
\square \qquad & b_n = n a_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{11}\\
\square \qquad & b_n = \frac{a_{n-1}}{n} \quad n \in \mathbb{N} \tag{12}\\
\square \qquad & b_n = (n+1) a_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{13}\\
\square \qquad & b_n = \frac{a_{n+1}}{n+1} \quad n \in \mathbb{N} \tag{14}\\
& \tag{15}
\end{align}$$

Aufgabe 16. Entwickle die Funktion $f(x) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^3}}$ bis einschließlich zur 3.Ordnung um $x_0 = 0$ und gebe eine Schranke für den relativen Fehler an, falls $|x| < \frac{1}{2}$ und die Funktion durch das Taylorpolynom 2. Grades approximiert wird!

3 Zusaetzliche Aufgaben

Aufgabe 17. Beweise die Rechenregeln Zeitumkehr und Verschiebung!

Aufgabe 18. Gegeben sei die $2\pi-$ periodische Funktion $f(x) = x * cosx$

- Welche Fourierkoeffizienten sind auf jeden fall 0?
- Berechne die Fourierreihe von $f(x)$

Aufgabe 19. Bestimme die reellen Fourierkoeffizienten der 2π periodischen Funktion
$f(x) = \frac{1}{\pi} * x^2, \quad 0 < x < \pi$
$f(x) = 2\pi - x, \quad \pi < x < 2\pi$

Aufgabe 20. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π periodisch mit $f(x) = \max(0, x)$ für$x \in (-\pi, \pi]$. Bestimme die Fourierkoeffizienten von

- f
- $g = f(-x)$
- $h = f + g$

Zeichne den Graphen und gebe die ersten Summanden der Cosinus-Sinus Darstellung an.

Aufgabe 21. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^x dt\, e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{16}$$

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung bis zur (einschliesslich) 5. Ordnung um $x_0 = 0$ an.

(b) Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe?