Ferienkurs Quantenmechanik I

Lösungen Freitag

Aufgabe 1: Potentialtopf mit Stufe

Wir sind im Fall 'Zwei harte Wände':

$$\int_0^a k(x)dx = n\pi \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n\pi\hbar = \sqrt{2m(E-V_0)}\left(\frac{a}{2}\right) + \sqrt{2mE}\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{2m}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0}\right)$$

$$\Rightarrow E + E - V_0 + 2\sqrt{E(E-V_0)} = \frac{1}{2m}\left(\frac{2n\pi\hbar}{a}\right)^2 = 4E_n^0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{E(E-V_0)} = 4E_n^0 - 2E + V_0$$

$$\Rightarrow 4E(E-V_0) = 4E^2 - 4EV_0 = 16(E_n^0)^2 + 4E^2 + V_0^2 - 16EE_n^0 + 8E_n^0V_0 - 4EV_0$$

$$\Rightarrow 16EE_n^0 = 16(E_n^0)^2 + 8E_n^0V_0 + V_0^2$$

$$\Rightarrow E_n := E = E_n^0 + \frac{V_0}{2} + \frac{V_0^2}{16E_n^0}$$

Aufgabe 2: Teilchen im Gravitationsfeld

a) Wir sind im Fall 'Eine harte Wand'. Damit folgt:

$$\int_0^{x_2} k(x)dx = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi \qquad \text{mit } E = mgx_2 \Rightarrow x_2 = \frac{E}{mg}$$

$$\hbar\int_0^{x_2} k(x)dx = \sqrt{2m}\int_0^{x_2}\sqrt{E-mgx}dx = \sqrt{2m}\left[-\frac{2}{3mg}(E-mgx)^{3/2}\right]_0^{x_2} =$$

$$= -\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}\left[(E-mgx_2)^{3/2} - E^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{E^{3/2}}{g} \stackrel{!}{=} \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar$$

$$\Rightarrow E^{3/2} = \frac{3\sqrt{m}g}{2^{3/2}}\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar$$

$$\Rightarrow E = E_n = \left(\frac{9}{8}\pi^2 mg^2\hbar^2\left(n - \frac{1}{4}\right)^2\right)^{1/3}$$

b) Es ergiben sich folgende Werte:

$$\beta := \left(\frac{9}{8}\pi^2 mg^2\hbar^2\right)^{1/3} = 1.06 \cdot 10^{-22} J$$

$$\Rightarrow E_n = mgx = 0.98J \stackrel{!}{=} \beta \cdot \left(n - \frac{1}{4}\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow n \approx 8.89 \cdot 10^{32}$$

Da n also sehr groß ist, ist offenbar $E_n \approx \beta \cdot n^{2/3}$.

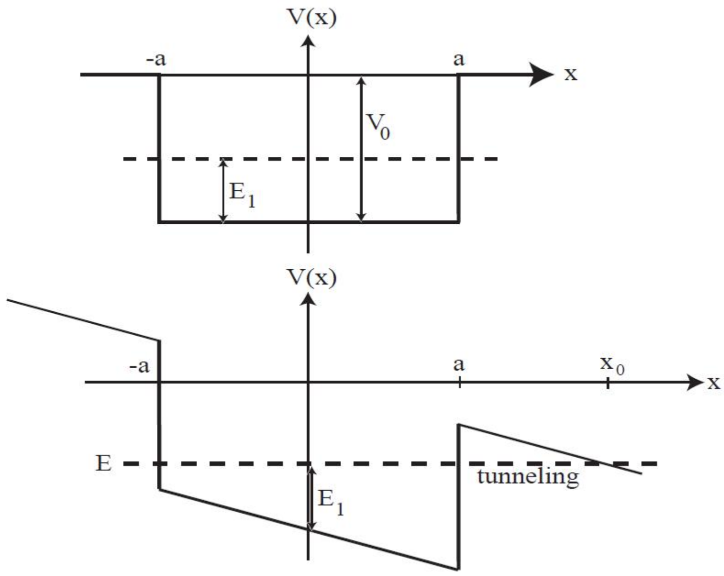
$$\Rightarrow E_{n+1} - E_n \approx \beta \cdot ((n+1)^{2/3} - n^{2/3}) = \beta \cdot n^{2/3} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2/3} - 1 \right] \approx$$

$$\approx \beta \cdot n^{2/3} \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} - 1 \right] = \frac{2}{3} \beta n^{-1/3}$$

$$\Rightarrow E_{n+1} - E_n \approx 7.35 \cdot 10^{-34} J$$

Diese Energiedifferenz ist im Vergleich zur mittleren potentiellen Energie des Balls um 34 Größenordnungen kleiner und definitiv nicht messbar. Deshalb erscheinen uns die Energieniveaus im Alltag kontinuierlich!

Aufgabe 3: Tunnelphänomen beim Stark-Effekt



Der Punkt x_0 aus der Skizze ergibt sich aus der Bedingung

$$\alpha x_0 = V_0 - E_1 \Rightarrow x_0 = \frac{V_0 - E_1}{\alpha}$$

Für $\kappa(x)$ im Bereich zwischen a und x_0 ergibt sich:

$$\hbar\kappa(x) = \sqrt{2m(V(x) - E)} = \sqrt{2m(-\alpha x - E)} \qquad \text{mit } E = -V_0 + E_1$$

$$\Rightarrow \hbar\kappa(x) = \sqrt{2m(-\alpha x + V_0 - E_1)} = \sqrt{2m\alpha}\sqrt{x_0 - x}$$

Für den Tunnelfaktor $\gamma = \int_a^{x_0} \kappa(x) dx$ ergibt sich somit

$$\gamma = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\alpha} \int_a^{x_0} \sqrt{x_0 - x} dx = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{\hbar} \left[-\frac{2}{3}(x_0 - x)^{3/2} \right]_a^{x_0} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2m\alpha}}{\hbar} (x_0 - a)^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m\alpha}}{\hbar}\left(\frac{V_0 - E_1 - a\alpha}{\alpha}\right)^{3/2} \approx \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m\alpha}}{\hbar}\left(\frac{V_0}{\alpha}\right)^{3/2} = \frac{\sqrt{8mV_0^3}}{3\alpha\hbar}$$

$$\Rightarrow T \approx \exp\left(-2 \cdot \frac{\sqrt{8mV_0^3}}{3\alpha\hbar}\right)$$

Aufgabe 4: Variationsprinzip und Abschätzungen zur Störungstheorie

a) Mit dem Hinweis und der Hermetizität von H ergibt sich:

$$\langle \psi \,|\, H \,|\, \psi \rangle = \sum_n \langle \psi \,|\, n \rangle \langle n \,|\, H \,|\, \psi \rangle = \sum_n E_n \langle \psi \,|\, n \rangle \langle n \,|\, \psi \rangle$$

Für die Grundzustandsenergie E_0 gilt definitionsgemäß $E_n \geq E_0$. Damit kann man abschätzen:

$$\langle \psi \,|\, H \,|\, \psi \rangle \geq E_0 \sum_n \langle \psi \,|\, n \rangle \langle n \,|\, \psi \rangle = E_0 \langle \psi \,|\, \psi \rangle$$

b) Es sei $|0\rangle = |\psi_0\rangle$ der tatsächliche (normierte) Grundzustand zu $H = H^0 + H'$. Weiterhin sei $\left|\psi_0^0\right\rangle$ die Wellenfunktion zum Grundzustand in nullter Ordnung Störungstheorie, d.h. der Grundzustand von H^0. Aus der Ungleichung in (a) folgt:

$$E_0 = E_0 \left\langle \psi_0^0 \,\middle|\, \psi_0^0 \right\rangle \leq \left\langle \psi_0^0 \,\middle|\, H^0 + H' \,\middle|\, \psi_0^0 \right\rangle =$$

$$= E_0^0 + \left\langle \psi_0^0 \,\middle|\, H' \,\middle|\, \psi_0^0 \right\rangle = E_0^0 + E_0^1$$

c) Laut Vorlesung gilt für E_0^2:

$$E_0^2 = \sum_{m \neq 0} \frac{|\left\langle \psi_m^0 \,\middle|\, H' \,\middle|\, \psi_0^0 \right\rangle|^2}{E_0^0 - E_m^0}$$

Der Zähler jedes Summanden ist offenbar positiv oder gleich 0, für den Nenner gilt stets $E_0^0 < E_m^0$, da die Grundzustandsenergie von H_0 die kleinste aller vorkommenden Energien ist. Somit ist der Nenner stets kleiner 0 und es gilt:

$$E_0^2 \leq 0$$

Aufgabe 5:
Zweidimensionaler harmonischer Oszillator mit Störung

In der Bra-Ket-Notation bezieht sich die erste Zahl stets auf die Quantenzahl n der x-Komponente, entsprechend die zweite Zahl auf die y-Komponente.

Energiekorrektur erster Ordnung

$$E_0^1 = \left\langle 00 \middle| \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot 2\lambda xy \middle| 00 \right\rangle = \left\langle 00 \middle| m\omega^2 \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger)(a_y + a_y^\dagger) \middle| 00 \right\rangle$$

Die Terme mit einem a_x oder einem a_y erzeugen als Absteigeoperatoren auf den Grundzustand jeweils eine 0. Der Term mit $a_x^\dagger a_y^\dagger$ erzeugt den Zustand $|11\rangle$, welcher orthogonal zum Grundzustand ist. Somit verschwinden alle Summanden und es gilt

$$E_0^1 = 0$$

Energiekorrektur zweiter Ordnung

Gemäß Vorlesung gilt mit $H' = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot 2\lambda xy$:

$$E_0^2 = \sum_{m\neq 0} \frac{|\left\langle \psi_m^0 \middle| H' \middle| \psi_0^0 \right\rangle|^2}{E_0^0 - E_m^0} = ...$$

Für einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator gilt
$E(n_x, n_y) = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$. Somit ergibt sich

$$... = \sum_{m\neq 0} \frac{\left|\left\langle \psi_m^0 \middle| m\omega^2 \lambda \frac{\hbar}{2m\omega}(a_x + a_x^\dagger)(a_y + a_y^\dagger) \middle| 00 \right\rangle\right|^2}{\hbar\omega - \hbar\omega(m_x + m_y + 1)} =$$

$$= -\frac{\hbar^2\lambda^2\omega^2}{4} \sum_{m\neq 0} \frac{\left|\left\langle \psi_m^0 \middle| a_x a_y + a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y + a_x^\dagger a_y^\dagger \middle| 00 \right\rangle\right|^2}{\hbar\omega(m_x + m_y)} = ...$$

Jeder Summand, in dem mindestens ein Absteigeoperator vorkommt liefert eine 0, da rechts der Grundzustand steht. Weiterhin gilt $a_x^\dagger a_y^\dagger |00\rangle = |11\rangle$ und es folgt:

$$... = -\frac{\hbar\omega\lambda^2}{4} \sum_{m\neq 0} \frac{|0 + 0 + 0 + \delta_{m_x 1}\delta_{m_y 1}|^2}{m_x + m_y} = -\frac{\hbar\omega\lambda^2}{4}\frac{1}{2} = -\frac{\hbar\omega\lambda^2}{8}$$