Ferienkurs Quantenmechanik I

Übungen Freitag

Aufgabe 1: Potentialtopf mit Stufe

Betrachte folgendes Potential (es sei $V_0 > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{falls } 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{falls } \frac{a}{2} < x < a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne mit Hilfe der WKB-Näherung die Energieniveaus der gebundenen Zustände (es sei $E > V_0$). Drücke das Ergebnis durch $E_n^0 = \frac{(n\hbar\pi)^2}{2ma^2}$ aus; dies sind gerade die Energieniveaus des unendlich hohen Potentialtopfs mit Breite a **ohne** zusätzliche Stufe.

Aufgabe 2: Teilchen im Gravitationsfeld

Betrachte ein Teilchen der Masse m in der Nähe der Erdoberfläche mit perfekt reflektierendem Boden:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{falls } x < 0 \\ mgx & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

a) Berechne mit Hilfe der WKB-Näherung die Energieniveaus E_n.

b) Wie lässt sich das Ergebnis quantisierter Energien mit der Alltagserfahrung vereinbaren? Betrachte dazu einen Ball der Masse $m = 100$g in einer Höhe von $x = 1$m. Setze E_n gleich der potentiellen Energie des Balls in dieser Höhe (das ist eine Näherung!) und berechne die entsprechende Quantenzahl n. Wie groß ist für solche n der Abstand zweier Energieniveaus?
Hinweis: Verwende sinnvolle Näherungen wie z.B. $(1 + \epsilon)^m \approx 1 + m\epsilon$ für $\epsilon \ll 1$

Aufgabe 3: Tunnelphänomen beim Stark-Effekt

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Elektron, welches in einem Atom durch ein einfaches, tiefes Kastenpotential ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{falls } -a < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gebunden sei. Wir nehmen an, dass sich das Elektron im Grundzustand befindet, für großes V_0 liegt dieser um den Betrag $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$ über dem Boden des Kastens. Nun wird ein externes elektrisches Feld eingeschaltet, dargestellt durch $H' = -\alpha x$ mit $\alpha > 0$.

a) Skizziere das Potential mit und ohne zusätzliches elektrisches Feld. Erkläre qualitativ, warum in Anwesenheit des äußeren Feldes das Elektron in positive x-Richtung tunneln kann.

b) Zeige mit Hilfe der WKB-Näherung, dass für die Tunnelwahrscheinlichkeit T gilt:

$$T \approx \exp\left(-2 \cdot \frac{\sqrt{8mV_0^3}}{3\alpha\hbar}\right)$$

Nehme dabei an, dass das äußere Feld nur sehr schwach ist (d.h. $\alpha a \ll V_0$) und außerdem, dass das Potential sehr tief ist (d.h. $E_1 \ll V_0$)

Aufgabe 4:
Variationsprinzip und Abschätzungen zur Störungstheorie

a) Es sei H ein beliebiger Hamiltonoperator mit den Eigenfunktionen $|n\rangle$. Weiterhin sei $|\psi\rangle$ ein **beliebiger** Zustand. Beweise folgende Ungleichung:

$$\langle \psi \,|\, H \,|\, \psi \rangle \geq E_0 \langle \psi \,|\, \psi \rangle$$

wobei E_0 die Grundzustandsenergie von H sei.
Hinweis: Betrachte $\langle \psi \,|\, H \,|\, \psi \rangle = \sum_n \langle \psi \,|\, n \rangle \langle n \,|\, H \,|\, \psi \rangle$

b) Verwende das Ergebnis aus (a), um zu zeigen, dass die Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie immer **größer** als die tatsächliche Grundzustandsenerige ist:

$$E_0^0 + E_0^1 \geq E_0$$

wobei E_0^0 durch $H^0 \psi_0^0 = E_0^0 \psi_0^0$ definiert ist (Notationen wie in der Vorlesung).

c) Zeige dass die Energiekorrektur zum Grundzustand in zweiter Ordnung Störungstheorie immer negativ ist:

$$E_0^2 \leq 0$$

Aufgabe 5:
Zweidimensionaler harmonischer Oszillator mit Störung

Betrachte den Hamiltonoperator eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit einer kleinen Störung ($\lambda \ll 1$):

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot 2\lambda xy$$

Berechne die durch die Störung hervorgerufene Energieänderung **für den Grundzustand** in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie. Benutze dabei die Relationen (siehe Kapitel über den harmonischen Oszillator)

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger) \qquad \text{und} \qquad y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_y + a_y^\dagger)$$