Ferienkurs Quantenmechanik I

Übungen Donnerstag

Aufgabe 1:
Kommutatoren der Schwerpunkts- und Relativkoordinate

Analog zu den in der Vorlesung eingeführten Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $\vec{R}$ und $\vec{r}$ gilt für den Schwerpunkts- und Relativimpuls:

$$\vec{P} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

$$\vec{p} = \frac{m_2\vec{p_1} - m_1\vec{p_2}}{m_1 + m_2}$$

Weise folgende Kommutator-Relationen nach:

$$[R_i, P_j] = \delta_{ij} i\hbar$$

$$[r_i, p_j] = \delta_{ij} i\hbar$$

Aufgabe 2: Zeeman-Effekt

Betrachte ein Wasserstoffatom in einem externen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e_z}$. Als Vektorpotential sei $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ gewählt, damit gilt $\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{p}$ (wer will, kann das auch nachrechnen!).

a) Schreibe den Hamiltonoperator in der Form $H = H_0 + H'$, wobei H_0 der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms bei Magnetfeld Null ist. Drücke die Störung H' durch die Zyklotronfrequenz $\omega = \frac{eB}{m_e c}$, den Drehimpulsoperator L_z und $r^2 \sin^2\theta$ aus. Die Kernmasse sei unendlich.
Hinweis: In SI-Einheiten lautet der kanonische Impuls $\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$.

b) Berechne für den im Magnetfeld linearen Term von H' mit Störungstheorie erster Ordnung die Energieverschiebung für einen beliebigen Zustand $|nlm\rangle$. Was hat das Ergebnis für eine Auswirkung auf den Entartungsgrad der Zustände?
Hinweis: Verwende das Bohrsche Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$

Aufgabe 3: Der Grundzustand des Wasserstoffatoms

a) Was ist der wahrscheinlichste Wert von r im Grundzustand des Wasserstoffatoms? (Das Ergebnis ist nicht 0!)

b) Was ist der Erwartungswert von r im Grundzustand des Wasserstoffatoms?
Hinweis: $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$

Aufgabe 4:
Definition der Spur, Dichtematrix eines reinen Zustandes

a) Beweise, dass die Definition der Spur eines Operators X nicht vom konkret gewählten Basissystem abhängt, d.h. dass für zwei beliebige, vollständige Orthonormalsysteme $|m\rangle$ und $|n\rangle$ gilt:

$$\sum_n \langle n \,|\, X \,|\, n\rangle = \sum_m \langle m \,|\, X \,|\, m\rangle$$

b) Beweise die Bemerkung aus der Vorlesung:
Hat der Zustand $|\psi_{tot}\rangle$ des Gesamtsystems $a + b$ die Produktdarstellung

$$|\psi_{tot}\rangle = \left(\sum_n a_n \,|n\rangle\right)\left(\sum_m b_m \,|m\rangle\right) \qquad \text{mit } \sum_n |a_n|^2 = \sum_m |b_m|^2 = 1$$

wobei $|n\rangle$ bzw. $|m\rangle$ ein vollständiges ONS von a bzw. b sei, so gilt für die reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho} = \mathrm{Sp}_b\left(\rho_{tot}\right)$

$$\mathrm{Sp}_a\left(\hat{\rho}^2\right) = 1$$

d.h. der Zustand ist nicht verschränkt.

Aufgabe 5: Dichtematrix von Zwei-Niveau-Systemen

Man kann zeigen, dass die Dichtematrix eines Zwei-Niveau-Systems (also z.B. ein System aus spin-up und spin-down, siehe Bsp. in der Vorlesung) stets folgende Gestalt hat:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P} \cdot \sigma)$$

wobei σ der Vektor der drei Pauli-Matrizen und $\mathbf{P}$ der sogenannte Blochvektor ist.

a) Berechne ρ^2 und zeige damit, dass für den Blochvektor stets $\mathbf{P}^2 \leq 1$ gilt, und dass der Betrag von $\mathbf{P}$ genau dann gleich 1 ist, wenn ρ einen reinen Zustand beschreibt.
Hinweis: $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$

b) Der Operator für die Spinprojektion in die Raumrichtung $\mathbf{n}$ ist $S_n = \sigma \cdot \mathbf{n}$. Zeige, dass für dessen Erwartungswert die Identität $\langle S_n \rangle = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ gilt.

c) Betrachte nun den Spezialfall eines **reinen Zustandes**, dargestellt durch einen normierten 2-Spinor $|\chi\rangle$. Leite aus der Schrödingergleichung für $|\chi\rangle$ die *Von-Neumann-Gleichung* her:

$$i\hbar \partial_t \rho = [H, \rho]$$