1 Drehimpulsalgebra

(a)

$$[L_z, x] = [xp_y - yp_x, x] = [xp_y, x] - [yp_x, x] = 0 - y[p_x, x] = i\hbar y$$

$$[L_z, y] = [xp_y - yp_x, y] = [xp_y, y] - [yp_x, y] = x[p_y, y] - 0 = -i\hbar x$$

$$[L_z, z] = [xp_y - yp_x, z] = [xp_y, z] - [yp_x, z] = 0 - 0 = 0$$

$$[L_z, p_x] = [xp_y - yp_x, p_x] = [xp_y, p_x] - [yp_x, p_x] = [x, p_x]p_y - 0 = i\hbar p_y$$

$$[L_z, p_y] = [xp_y - yp_x, p_y] = [xp_y, p_y] - [yp_x, p_y] = 0 - [y, p_y]p_x - 0 = -i\hbar p_x$$

$$[L_z, p_z] = [xp_y - yp_x, p_z] = [xp_y, p_z] - [yp_x, p_z] = 0 - 0 = 0$$

(b)

$$\begin{aligned}[L_z, L_x] &= [L_z, yp_z - zp_y] = [L_z, yp_z] - [L_z, zp_y] = [L_z, y]p_z + y\underbrace{[L_z, p_z]}_{=0} - \underbrace{[L_z, z]}_{=0}p_y - z[L_z, p_y]z \\ &= -i\hbar p_z + i\hbar p_x z = i\hbar(zp_x - xp_z) = i\hbar L_y\end{aligned}$$

Dies gilt auch für eine zyklische Vertauschung der Indizes, also $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ usw.

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] + [zp_y, xp_z] \\ &= y\underbrace{[p_z, z]}_{-i\hbar}p_x + x\underbrace{[z, p_z]}_{i\hbar}p_y \\ &= i\hbar(xp_y - yp_x) \\ &= i\hbar L_z\end{aligned}$$

Es können somit keine zwei Komponenten des Drehimpulses Gleichzeitig scharf gemessen werden.

(c)

$$\begin{aligned}[L_z, r^2] &= [L_z, x^2] + [L_z, y^2] + [L_z, z^2] \\ &= x[L_z, x] + [L_z, x]x + y[L_z, y] + [L_z, y]y + z\underbrace{[L_z, z]}_{=0} + [L_z, z]z \\ &= i\hbar yx + xi\hbar y + (-i\hbar x)y + y(-i\hbar x) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[L_z, p^2] &= [L_z, p_x^2] + [L_z, p_y^2] + [L_z, p_z^2] \\ &= p_x[L_z, p_x] + [L_z, p_x]p_x + p_y[L_z, p_y] + [L_z, p_y]p_y + p_z\underbrace{[L_z, p_z]}_{=0} + [L_z, p_z]p_z \\ &= i\hbar p_y p_x + p_x i\hbar p_y + (-i\hbar p_x)p_y + p_y(-i\hbar p_x) = 0\end{aligned}$$

(d) Aus (c) folgt, dass alle drei Komponenten von L mit r^2 und p^2 kommutieren und somit auch mit dem gesamten Hamilton Operator, wenn

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\sqrt{r^2})$$

2 Dreidimensionale SG - sphärischer Potentialtopf

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > r_0 \\ -V_0 & r < r_0 \end{cases}$$

Es sei $V_0 > 0$. In dieser Aufgabe sollen die Wellenfunktionen der gebundenen Zustände gesucht werden.

→ Der Hamilton Operator lautet:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

Der Impuls lässt sich in Kugelkoordinaten durch den Drehimpuls ausdrücken.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) - E\right]\psi(r,\theta,\varphi) = 0$$

Somit lautet die Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} r < r_0 : \quad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r) + \frac{L^2}{2mr^2} - V_0 - E\right]\psi(r,\theta,\varphi) = 0 \\ r > r_0 : \quad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r) + \frac{L^2}{2mr^2} - E\right]\psi(r,\theta,\varphi) = 0 \end{aligned}$$

→ Nach Aufgabe 1c wissen wir also es gibt gemeinsame Eigenfunktion von H und L^2, L_z. Da wir die Eigenfunktionen von L^2 bereits kennen, machen wir als Lösung den Seperationsansatz:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Damit folgt für

$$\begin{aligned}
r < r_0: \qquad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - V_0 - E\right] R(r) = 0 \\
r > r_0 \qquad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - E\right] R(r) = 0
\end{aligned}$$

→ Für den Rest der Aufgabe soll l=0 angenommen werden.

$$\Rightarrow \psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\underbrace{Y_{00}(\theta,\varphi)}_{1/\sqrt{4\pi}} = R(r)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\begin{aligned}
r < r_0: \qquad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r) - V_0 - E\right] R(r) = 0 \\
r > r_0 \qquad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r) - E\right] R(r) = 0
\end{aligned}$$

Um diese Gleichungen zu vereinfachen, substituieren wir wie in der Vorlesung:

$$R(r) = \frac{u(r)}{r} \quad und \quad \frac{1}{r^2}\partial r(r^2\partial r)R(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r)$$

Damit reduziert sich die SG zu:

$$\begin{aligned}
r < r_0: \qquad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} - V_0 - E\right] u(r) = 0 \\
r > r_0 \qquad & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} - E\right] u(r) = 0
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für u(r) ist nun einfach. Wir schreiben gleich die Lösung für R(r) auf, wobei zur Lösung von u(r) einfach ein Faktor $\frac{1}{r}$ hinzukommt (betrachte Substitution).

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{Ae^{ikr}+Be^{-ikr}}{r} & r < r_0 \\ \frac{Ce^{\kappa r}+De^{-\kappa r}}{r} & r > r_0 \end{cases}$$

Hierbei gilt: $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + \underline{E}_{<0})$ und $\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}|E|$ Man muss darauf achten, dass es sich um gebundene Zustände in einem Potentialtopf handelt, daher ist E negativ.

→ Nun betrachten wir die Randbedingungen an die Wellenfunktion.

- Da es sich um gebundene Zustände handelt, muss die Wellenfunktion für $r \to \infty$ verschwinden. Dies bedeutet, dass C=0 sein muss.
- Außerdem muss die Wellenfunktion im Ursprung endlich sein ($\frac{1}{r}$ - Abhängigkeit). Deshalb muss A + B = 0 sein. Mit diesen Bedingungen erhält man folgende Form der Lösung:

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{Asin(kr)}{r} & r < r_0 \\ \frac{Be^{-\kappa r}}{r} & r > r_0 \end{cases}$$

- Wir müssen noch die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung bei $r = r_0$ berücksichtigen. Das liefert die Bedingung:

$$\frac{Asin(kr_0)}{r_0} = \frac{Be^{-\kappa r_0}}{r_0}$$
$$A\frac{kr_0cos(kr_0) - sin(kr_0)}{r_0^2} = B\frac{-\kappa r_0 e^{-\kappa r_0} - e^{-\kappa r_0} -}{r_0^2}$$

→ Aus diesen Bedingungen können nun die Form der Wellenfunktion und die möglichen Energien der Bindung gewonnen werden können. Das obige Gleichungssystem lässt sich in der Form

$$M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

schreiben. Ein solches Gleichungssystem besitzt nur dann eine nicht- triviale Lösungen, wenn $Det(M) = 0$. In unserem Fall folgt daraus die Bedingung:

$$sin(kr_0)(1 + \kappa r_0)e^{-\kappa r_0} = e^{-\kappa r_0}(sin(kr_0) - kr_0cos(kr_0))$$

Einige Umformungen bringen die Bedingung, aus der die Energie bestimmt werden kann

$$tan(kr_0) = -\frac{k}{\kappa}$$

Die Wellenfunktion lautet in diesem Fall:

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{Asin(kr)}{r} & r < r_0 \\ \frac{Asin(kr_0)e^{-\kappa(r-r_0)}}{r} & r > r_0 \end{cases}$$

→ Die Normierungsbedingung lautet:

$$\begin{aligned} 1 &= |A|^2 \int_0^{r_0} dr sin^2 kr + |A|^2 sin^2 kr_0 \int_{r_0}^{\infty} dr e^{-\kappa(r-r_0)} \\ &= |A|^2 \left(\frac{r_0}{2} - \frac{1}{4k} sin 2kr_0 + \frac{sin^2 kr_0}{\kappa} \right) \end{aligned}$$

3 Elektron im Magnetfeld

(a) Zunächst bestimmt man die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators S_y. Diese lauten:

$$Eigenwert: +\tfrac{\hbar}{2} \quad Eigenvektor: \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$
$$Eigenwert: -\tfrac{\hbar}{2} \quad Eigenvektor: \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren in der Basis des Operators S_z lauten dann:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +\rangle + i \mid -\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +\rangle - i \mid -\rangle)$$

Der Zustand des Elektrons ist also:

$$\mid \psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +\rangle + i \mid -\rangle)$$

(b) Die zeitliche Entwicklung des Zustandes ist gegeben durch

$$\mid \psi(t)\rangle = a(t) \mid +\rangle + b(t) \mid -\rangle$$

$$\Rightarrow a(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b(t=0) = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Da sich das Elektron in einem konstanten magnetsichen Feld B befindet, welches in z-Rtg. zeigt, lautet der zugehörige Hamilton- Operator:

$$H = -\mu_b B S_z$$

Damit lösen wir die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi(t)\rangle = H \mid \psi(t)\rangle$$

Es ergibt sich:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = -\mu_b B\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Dies sind zwei ungekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung für die Koeffizienten a(t) und b(t). Sie lauten:

$$a'(t) = i\frac{\mu_b B}{2}a(t)$$

$$b'(t) = -i\frac{\mu_b B}{2} b(t)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$a(t) = a(t=0)exp(i\frac{\mu_b B}{2}t) = \frac{1}{\sqrt{2}}exp(i\frac{\mu_b B}{2})$$

$$b(t) = b(t=0)exp(-i\frac{\mu_b B}{2}t) = \frac{i}{\sqrt{2}}exp(-i\frac{\mu_b B}{2})$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach der Zeit t im Zustand $| +\rangle$ zu finden ist:

$$P_+ = \langle + \mid \psi(t)\rangle = |a(t=0)|^2 = \frac{1}{2}$$

Wie wir bereits in a gezeigt haben lautet der Eigenzustand mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ bzgl. des Operator S_y:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(| +\rangle - i \mid -\rangle)$$

Das Elektron befindet sich in diesem Zustand, wenn

$$a(t) = a(t=0)exp(i\frac{\mu_b B}{2}t) = \frac{1}{\sqrt{2}}exp(i\frac{\mu_b B}{2}t) =^! c\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b(t) = b(t=0)exp(-i\frac{\mu_b B}{2}t) = \frac{i}{\sqrt{2}}exp(-i\frac{\mu_b B}{2}t) =^! -c\frac{i}{\sqrt{2}}$$

Dass heisst:

$$exp(i\frac{\mu_b B}{2}t) = +c \qquad und \qquad exp(-i\frac{\mu_b B}{2}t) = -c$$

Damit ist ein Spinflip nach der Zeit $t = \frac{\pi}{\mu_b B}$ möglich, wobei dann c=i ist.

4 Spinmessung

Ein Elektron befinde sich in dem Spinzustand

$$\chi = A\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} = A[(1-2i) \mid +\rangle + 2 \mid -\rangle]$$

(a) Normierungsbedingung:

$$1 = |A|^2(1+2i, 2)\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} = |A|^2(1+4+4) \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

(b) S_z Messung: Der Spinor befindet sich in der S_z Basis. Die Eigenwerte können daher direkt abgelesen werden:

$\frac{\hbar}{2}$ mit der W-keit $\frac{5}{9}$ und $-\frac{\hbar}{2}$ mit der W-keit $\frac{4}{9}$

Erwartungswert: $< S_z >= \frac{5}{9}\frac{\hbar}{2} - \frac{4}{9}\frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{18}$

(c) S_x Messung. Der Eigenvektor von S_x zum Eigenwert $\pm\frac{\hbar}{2}$ in der S_z- Basis lautet:

$$\mid \vec{x}, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +\rangle \pm \mid -\rangle)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
P_{+x} &= |\langle \vec{x}, + \mid \chi\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{9}|\left(\langle + \mid + \langle - \mid\right) \cdot \left((1-2i) \mid +\rangle + 2 \mid -\rangle\right)|^2 \\
&= \frac{1}{18}|1 - 2i + 2|^2 \\
&= \frac{13}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{-x} &= |\langle \vec{x}, - \mid \chi\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{9}|\left(\langle + \mid - \langle - \mid\right) \cdot \left((1-2i) \mid +\rangle + 2 \mid -\rangle\right)|^2 \\
&= \frac{1}{18}|1 - 2i - 2|^2 \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

Erwartungswert: $< S_x >= \frac{13}{18}\frac{\hbar}{2} - \frac{5}{18}\frac{\hbar}{2} = \frac{2\hbar}{9}$

(d) S_y Messung. Der Eigenvektor von S_y zum Eigenwert $\pm\frac{\hbar}{2}$ in der S_z- Basis lautet:

$$\mid \vec{y}, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +\rangle \pm i \mid -\rangle)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
P_{+y} &= |\langle \vec{y}, + \mid \chi\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{9}|\left(\langle + \mid -i\langle - \mid\right) \cdot \left((1-2i) \mid +\rangle + 2 \mid -\rangle\right)|^2 \\
&= \frac{1}{18}|1 - 2i - 2i|^2 \\
&= \frac{17}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{-y} &= |\langle \vec{y}, - \mid \chi \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{9} |\left(\langle + \mid + i \langle - \mid \right) \cdot \left((1-2i) \mid + \rangle + 2 \mid - \rangle \right)|^2 \\
&= \frac{1}{18} |1 - 2i + 2i|^2 \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

Erwartungswert: $< S_y >= \frac{17}{18}\frac{\hbar}{2} - \frac{1}{18}\frac{\hbar}{2} = \frac{4\hbar}{9}$

5 Kopplung von Drehimpulsen

→

$$S_- \mid s=1, m=0\rangle = (S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\underbrace{S_{1-} \; |\uparrow\downarrow\rangle}_{=\hbar|\downarrow\downarrow} + \underbrace{S_{1-} \; |\downarrow\uparrow\rangle}_{=0} + \underbrace{S_{2-} \; |\uparrow\downarrow\rangle}_{=0} + \underbrace{S_{2-} \; |\downarrow\uparrow\rangle}_{=\hbar|\downarrow\downarrow\rangle}) = \sqrt{2}\hbar \mid 1, -1\rangle$$

→

$$S_\pm \mid 0,0\rangle = (S_{\pm 1} + S_{\pm 2}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (S_{\pm 1} \; |\uparrow\downarrow\rangle - S_{\pm 1} \; |\downarrow\uparrow\rangle + S_{\pm 2} \; |\uparrow\downarrow\rangle - S_{\pm 2} \; |\downarrow\uparrow\rangle) = 0$$

Durch anwenden des Auf- und Absteigeoperators können also keine weiteren Singlett Zustände erzeugt werden.

→

$$\begin{aligned}
S^2 \mid 11\rangle &= \left[S_1^2 + S_2^2 + 2 S_1 \cdot S_2 \right] \mid \uparrow\uparrow\rangle \\
&= S_1^2 \; |\uparrow\uparrow\rangle + S_2^2 \mid \uparrow\uparrow\rangle + 2 \left[S_{1x} S_{2x} \; |\uparrow\uparrow\rangle + S_{1y} S_{2y} \; |\uparrow\uparrow\rangle + S_{1z} S_{2z} \; |\uparrow\uparrow\rangle \right] \\
&= \frac{3}{4}\hbar^2 \; |\uparrow\uparrow\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2 \; |\uparrow\uparrow\rangle + 2 \left[\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2} \; |\downarrow\downarrow\rangle + \frac{i\hbar}{2}\frac{i\hbar}{2} \; |\downarrow\downarrow\rangle + \frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2} \; |\uparrow\uparrow\rangle \right] \\
&= \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \hbar^2 \; |\uparrow\uparrow\rangle \\
&= 2\hbar^2 \; |\uparrow\uparrow\rangle \\
&= 1(1+1)\hbar^2 \; |\uparrow\uparrow\rangle
\end{aligned}$$

Wobei ausgenutzt wurde:

$$\begin{aligned} S_x \left|\uparrow\right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \left|\downarrow\right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y \left|\uparrow\right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\hbar}{2} \left|\downarrow\right\rangle \end{aligned}$$

$\rightarrow$

$$\begin{aligned} S^2 \mid 1 - 1\rangle &= \left[S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2\right] \mid \downarrow\downarrow\rangle \\ &= S_1^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle + S_2^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle + 2\left[S_{1x}S_{2x} \left|\downarrow\downarrow\right\rangle + S_{1y}S_{2y} \left|\downarrow\downarrow\right\rangle + S_{1z}S_{2z} \left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right] \\ &= \frac{3}{4}\hbar^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle + 2\left[\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2} \left|\uparrow\uparrow\right\rangle + \frac{-i\hbar}{2}\frac{-i\hbar}{2} \left|\uparrow\uparrow\right\rangle + \frac{-\hbar}{2}\frac{-\hbar}{2} \left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right] \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\hbar^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \\ &= 2\hbar^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \\ &= 1(1+1)\hbar^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \end{aligned}$$

Wobei ausgenutzt wurde:

$$\begin{aligned} S_x \left|\downarrow\right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \left|\uparrow\right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y \left|\downarrow\right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-i\hbar}{2} \left|\uparrow\right\rangle \end{aligned}$$