1 Skalarprodukt und Operatoren

(a) Beim Skalarprodukt ist zu beachten, dass das erste Argument komplex konjugiert werden muss.

$$\begin{aligned}\langle\alpha \mid \beta\rangle &= -ii\langle 1 \mid 1\rangle - 2i\langle 1 \mid 3\rangle - 2i\langle 2 \mid 1\rangle - 4\langle 2 \mid 3\rangle + ii\langle 3 \mid 1\rangle + 2i\langle 3 \mid 3\rangle \\ &= 1 + 2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\alpha \mid \beta\rangle &= -ii\langle 1 \mid 1\rangle + 2i\langle 3 \mid 1\rangle + 2i\langle 1 \mid 2\rangle - 4\langle 3 \mid 2\rangle + ii\langle 1 \mid 3\rangle - 2i\langle 3 \mid 3\rangle \\ &= 1 - 2i\end{aligned}$$

(b) Durch Anwendung von $\hat{A}$ auf die Basiszustände folgt:

$$\begin{aligned}\hat{A} \mid 1\rangle &= \mid \alpha\rangle\langle\beta \mid 1\rangle = -i \mid \alpha\rangle = \mid 1\rangle + 2i \mid 2\rangle - \mid 3\rangle \\ \hat{A} \mid 2\rangle &= \mid \alpha\rangle\langle\beta \mid 2\rangle = 0 \\ \hat{A} \mid 3\rangle &= \mid \alpha\rangle\langle\beta \mid 3\rangle = 2 \mid \alpha\rangle = 2i \mid 1\rangle - 4 \mid 2\rangle - 2i \mid 3\rangle\end{aligned}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & -2i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2i & -4 & 2i \end{pmatrix}$$

(c) $\hat{A} \neq \hat{A}^{+} \Rightarrow \hat{A}$ ist nicht hermitesch

2 Eigenwerte und Eigenvektoren

(a) Durch Anwenden von H auf die Basiszustände kann man sich wieder die Matrixdarstellung von H verdeutlischen

$$\begin{aligned}H \mid 1\rangle &= \epsilon(\mid 1\rangle\langle 1 \mid 1\rangle - \mid 2\rangle\langle 2 \mid 1\rangle + \mid 1\rangle\langle 2 \mid 1\rangle + \mid 2\rangle\langle 1 \mid 1\rangle) \\ &= \epsilon(\mid 1\rangle + \mid 2\rangle)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H \mid 2\rangle &= \epsilon(\mid 1\rangle\langle 1 \mid 2\rangle - \mid 2\rangle\langle 2 \mid 2\rangle + \mid 1\rangle\langle 2 \mid 2\rangle + \mid 2\rangle\langle 1 \mid 2\rangle) \\ &= \epsilon(\mid 1\rangle - \mid 2\rangle)\end{aligned}$$

$$H = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Zum Finden der Eigenwerte muss dass Eigenwertproblem $(H - \lambda 1)$ gelöst werden.

$$\begin{aligned} det(H - \lambda 1) &= 0 \\ -(\epsilon - \lambda)(\epsilon + \lambda) - \epsilon^2 &= 0 \\ \lambda^2 &= 2\epsilon^2 \\ \lambda_{1/2} &= \pm\sqrt{2}\epsilon \end{aligned}$$

Durch Einsetzten der Eigenwerte in das Eigenwertproblem lassen sich nun folgende Eigenvektoren finden:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{-2\epsilon+\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{2\epsilon+\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Cauchy-Schwarz-Ungleichung und verallgemeinerte Unschärferelation

(a) Ausmultiplizieren:

$$0 \leq \langle \psi + \lambda\phi | \psi + \phi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle + \lambda^* \langle \phi | \psi \rangle + \lambda \langle \psi | \phi \rangle + \lambda\lambda^* \langle \phi | \phi \rangle = g(\lambda, \lambda^*)$$

Dann λ und λ^* minimieren:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g(\lambda, \lambda^*) &= \langle \phi | \psi \rangle + \lambda \langle \phi | \phi \rangle \stackrel{!}{=} 0 \\ \partial_\lambda g(\lambda, \lambda^*) &= \langle \psi | \phi \rangle + \lambda^* \langle \phi | \phi \rangle \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_{min} = -\frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}, \qquad \lambda^*_{min} = -\frac{\langle \psi | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$0 \leq g(\lambda_{min}, \lambda^*_{min}) = \langle \psi | \psi \rangle - \frac{| \langle \phi | \psi \rangle |^2}{\langle \phi | \phi \rangle} \qquad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\xi|\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)^2|\xi\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2 = \left(\Delta\hat{A}\right)^2$$
$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\xi|\left(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle\right)^2|\xi\rangle = \langle\hat{B}^2\rangle - \langle\hat{B}\rangle^2 = \left(\Delta\hat{B}\right)^2$$
$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\xi|\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)\left(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle\right)|\xi\rangle = \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle$$
$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\xi|\left(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle\right)\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)|\xi\rangle = \langle\hat{B}\hat{A}\rangle - \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle$$

Eingesetzt in CSU:

$$\left(\Delta\hat{A}\right)^2\left(\Delta\hat{B}\right)^2 \geq \left|\langle\phi|\psi\rangle\right|^2 = \left[\Re\left(\langle\phi|\psi\rangle\right)\right]^2 + \left[\Im\left(\langle\phi|\psi\rangle\right)\right]^2 \geq \left[\Im\left(\langle\phi|\psi\rangle\right)\right]^2$$

$$\left(\Delta\hat{A}\right)^2\left(\Delta\hat{B}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\left|\langle\phi|\psi\rangle - \langle\psi|\phi\rangle\right|\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left|\langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle\hat{B}\hat{A}\rangle\right|\right)^2 = \frac{1}{4}\left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|^2$$

(b)

$$\begin{aligned}\left[\hat{x},\hat{p}\right]\psi &= \frac{\hbar}{i}\left[x,\partial_x\right]\psi = \frac{\hbar}{i}\left(x\partial_x\psi - \partial_x(\psi x)\right)\\ &= \frac{\hbar}{i}\left(\cancel{x\partial_x\psi} - \psi - \cancel{x\partial_x\psi}\right) = (i\hbar)\ \psi\end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist dann: $\left\langle[\hat{x},\hat{p}]\right\rangle = i\hbar$

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}|i\hbar| = \frac{\hbar}{2}$$

4 Hermitesche Operatoren

Gegeben seien die hermiteschen Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

(a) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA \Rightarrow (AB)^\dagger = AB$ genau dann, wenn $AB = BA$ gilt.

(b)

$$\begin{aligned}\left[(A+B)^n\right]^\dagger &= (A+B)^\dagger(A+B)^\dagger\cdots(A+B)^\dagger\\ &= (A^\dagger + B^\dagger)(A^\dagger + B^\dagger)\cdots(A^\dagger + B^\dagger)\\ &= (A+B)^n\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für jeden Operator A folgende Operatoren hermitesch sind:

(a) $(A + A^\dagger)^\dagger = A^\dagger + (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger + A = A + A^\dagger$

(b) $[i(A - A^+)]^\dagger = -i\left[A^\dagger - \left(A^\dagger\right)^\dagger\right] = i(A - A^\dagger)$

(c) $(AA^\dagger)^\dagger = (A^\dagger)^\dagger A^\dagger = AA^\dagger$

(d) Gegeben sei der hermitesche Operator A sowie die o.B.d.A. normierten Eigenzustände $\mid m\rangle$ und $\mid n\rangle$

$$\begin{aligned}\langle m \mid A \mid n\rangle &= \langle m \mid An\rangle \\ &= \langle m \mid a_n n\rangle \\ &= a_n\langle m \mid n\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle m \mid A \mid n\rangle &= \langle A^\dagger m \mid n\rangle \\ &= \langle Am \mid n\rangle \\ &= a_m^*\langle m \mid n\rangle\end{aligned}$$

Nun bildet man die Differenz: $0 = (a_n - a_m^*)\langle m \mid n\rangle$
Fallunterscheidung

i. n = m

$$\begin{aligned}0 &= (a_n - a_n^*)\langle n \mid n\rangle \\ &= (a_n - a_n^*) \\ a_n &= a_n^* \\ &\Rightarrow a_n \textit{ ist reell}\end{aligned}$$

ii. $n \neq m$

$$\begin{aligned}0 &= (a_n - a_m^*)\langle m \mid n\rangle \\ &\textit{Die Eigenwerte seien nicht entartet} \\ 0 &= \underbrace{(a_n - a_m^*)}_{\neq 0}\langle m \mid n\rangle \\ 0 &= \langle m \mid n\rangle \\ &\Rightarrow \textit{Die Eigenfunktionen sind orthogonal}\end{aligned}$$

5 Harmonischer Oszillator

(a) Erwartunswert von V:

$$< V >= \left\langle \frac{1}{2}mw^2x^2 \right\rangle = n \mid \frac{1}{2}mw^2x^2 \mid n\rangle$$

Stelle x durch Auf- und Absteigeoperatoren dar:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}(a + a^+) \Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{2mw}\left[(a^+)^2 + a^+a + aa^+ + a^2\right]$$

Damit gilt:

$$< V >= \frac{\hbar w}{4}\, n \mid (a^+)^2 + a^+a + aa^+ + a^2 \mid n\rangle$$

$a^{+2} \mid n\rangle$ und $a^2 \mid n\rangle$ sind orthogonal zu n, wodurch diese Terme wegfallen. Außerdem gilt:

$$a^+a \mid n\rangle = n \mid n\rangle \qquad aa^+ \mid n\rangle = (n+1) \mid n\rangle$$

Und somit folgt für den Erwartungswert von V:

$$< V >= \frac{\hbar w}{4}(n + n + 1) = \frac{1}{2}\hbar w \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Die potentielle Energie beträgt also genau die Hälfte der gesamten Energie des harmonischen Oszillators.

(b)

$$< x >= \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\langle n \mid a + a^+ \mid n\rangle = 0$$
$$< p >= \sqrt{\frac{\hbar mw}{2}}\langle n \mid \frac{a - a^+}{i} \mid n\rangle = 0$$
$$< x^2 >= \frac{\hbar}{2mw}\langle n \mid (a^+)^2 + a^+a + aa^+ + a^2 \mid n\rangle = \frac{\hbar}{2mw}(2n+1) = \frac{\hbar}{mw}(n + \frac{1}{2})$$
$$< p^2 >= \frac{-\hbar mw}{2}\langle n \mid a^2 - aa^+ - a^+a + (a^+)^2 \mid n\rangle = \frac{\hbar mw}{2}(2n+1) = (n + \frac{1}{2})\hbar mw$$
$$< T >=< p^2/2m >= \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\hbar w$$

$$\sigma_x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}}\sqrt{(n + \frac{1}{2})}$$
$$\sigma_p = \sqrt{< p^2 > - < p >^2} = \sqrt{(n + \frac{1}{2})}\sqrt{\hbar mw}$$

$$\sigma_x\sigma_p = \hbar(n + \frac{1}{2}) \geq \frac{\hbar}{2}$$