1 Skalarprodukt und Operatoren

In einem dreidimensionalen Hilbertraum sind folgende Vektorzustände gegeben

$$\mid\alpha\rangle = i \mid 1\rangle - 2 \mid 2\rangle - i \mid 3\rangle$$
$$\mid\beta\rangle = i \mid 1\rangle + 2 \mid 3\rangle$$

(a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle\alpha \mid \beta\rangle$ und $\langle\beta \mid \alpha\rangle$ und zeigen Sie, dass $\langle\alpha \mid \beta\rangle$ und $\langle\beta \mid \alpha\rangle^*$

(b) Finden Sie alle neun Matrixelemente von $\hat{A} = \mid\alpha\rangle\langle\beta\mid$ und geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{A}$ an.

(c) Ist der Operator $\hat{A}$ hermitesch ? Begründung ?

2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Der Hamilton- Operator eines Zwei- Niveau- Systems lautet:

$$\hat{H} = \epsilon(\mid 1\rangle\langle 1 \mid - \mid 2\rangle\langle 2 \mid + \mid 1\rangle\langle 2 \mid + \mid 2\rangle\langle 1 \mid)$$

wobei $\mid 1\rangle, \mid 2\rangle$ orthonormierte Basiszustände darstellen. Der Parameter ϵ hat Energieeinheiten. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von H in der Basis $\mid 1\rangle, \mid 2\rangle$. Wie lautet die Matrixdarstellung H in dieser Basis ?

3 Cauchy-Schwarz-Ungleichung und verallgemeinerte Unschärferelation

(a) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle\psi|\,\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\,\psi\rangle\,\langle\phi|\,\phi\rangle$

Hinweis: Betrachten Sie die Ungleichung $\langle\psi + \lambda\phi|\,\psi + \lambda\phi\rangle \geq 0$ und finden Sie den Wert von λ, der die linke Seite minimiert. Beachte, dass λ und λ^* unabhängig voneinander minimiert werden können.

(b) Beweisen Sie, dass für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die verallgemeinerte Unschärferelation gilt:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|$$

Hinweis: Betrachten Sie die CSU mit:

$$|\phi\rangle = \left(\hat{A} - \left\langle\hat{A}\right\rangle\right)|\xi\rangle \qquad |\psi\rangle = \left(\hat{B} - \left\langle\hat{B}\right\rangle\right)|\xi\rangle$$
$$\left\langle\hat{A}\right\rangle = \langle\xi|\,\hat{A}\,|\xi\rangle \qquad \left\langle\hat{B}\right\rangle = \langle\xi|\,\hat{B}\,|\xi\rangle$$

Beachten Sie auch dass für eine komplexe Zahl gilt:$|z|^2 = [\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2$

(c) Rechnen Sie nach, dass man für $\hat{A} = \hat{x} = x$ und $\hat{B} = \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\partial_x$ die bekannte Ort-Impuls-Unschärferelation erhält:

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$

4 Hermitesche Operatoren

Gegeben seien die hermiteschen Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Zeigen Sie, dass

(a) der Operator AB hermitesch ist, nur wenn $AB = BA$ gilt.

(b) $(A + B)^n$ hermitesch ist.

Beweisen Sie, dass für jeden Operator A folgende Operatoren hermitesch sind:

(a) $(A + A^+)$

(b) $i(A - A^+)$

(c) (AA^+)

Zeigen Sie, dass der Eigenwert eines hermiteschen Operators reel ist und dass die Eigenfunktionen orthogonal sind.

5 Harmonischer Oszillator

(a) Wie lautet der Erwartungswert für die potentielle Energie im n-ten Eigenzustand des harmonischen Oszillators ?

(b) Bestimme die Erwartungswerte $< x >$,$< p >$,$< T >$ und ihre Schwankungen Δx und Δp. Weisen Sie mit den Ergebnissen die Unschärferelation nach.