1 Stufenpotential

(a) Stelle die Wellenfunktion für den Fall $E > V$ auf.

Im Bereich $x < 0$ mit $V = 0$ gilt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = E\psi_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = -k_1^2\psi_1, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{1}$$

Der Lösungsansatz ist dann

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \tag{2}$$

Im Bereich $x > 0$ mit $V = V_0$ gilt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = (E - V_0)\psi_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = -k_2^2\psi_2, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}} \tag{3}$$

Der Lösungsansatz ist

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} \tag{4}$$

Bei $x = 0$ gelten die Anschlussbedingungen:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \qquad \wedge \qquad \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \tag{5}$$

Daraus folgt (man kann $A = 1$ setzen):

$$1 + B = C \qquad \wedge \qquad ik_1(1 - B) = ik_2C \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \tag{7}$$

Damit ergibt sich die Wellenfunktion zu:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1x} + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{-ik_1x} & , x < 0 \\ \frac{2k_1}{k_1+k_2}e^{ik_2x} & , x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

(b) Bestimme den Reflektions- und den Transmissionskoeffizienten

Um die Koeffizienten zu bestimmen betrachtet man zuerst die Stromdichten des entsprechenden Wellenfunktionsanteils:

$$j_{ein} = \frac{\hbar}{2im}\left(e^{-ik_1x}\partial_x e^{ik_1x} - e^{ik_1x}\partial_x e^{-ik_1x}\right) = \frac{\hbar k_1}{m}$$

$$j_{trans} = \frac{\hbar}{2im}\left(e^{-ik_2x}\partial_x e^{ik_2x} - e^{ik_2x}\partial_x e^{-ik_2x}\right)\frac{(2k_1)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{\hbar k_2}{m}\frac{(2k_1)^2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$j_{refl} = \frac{\hbar}{2im}\left(e^{ik_1x}\partial_x e^{-ik_1x} - e^{-ik_1x}\partial_x e^{ik_1x}\right)\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = -\frac{\hbar k_1}{m}\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$R = \frac{|j_{refl}|}{|j_{ein}|} = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}, \qquad T = \frac{|j_{trans}|}{|j_{ein}|} = \frac{k_2}{k_1}\frac{(2k_1)^2}{(k_1+k_2)^2} \tag{9}$$

Mit $R + T = 1$.

2 Kastenpotential

(a) Die Schrödingergleichung für $0 \leq x \leq a$ lautet:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{10}$$

Ein bequemer Ansatz ist hier:

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \tag{11}$$

Die Wellenfunktion kann nicht in die Wand eindringen, womit die Randbedingungen folgendermaßen lauten:

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \tag{12}$$

Aus $\psi(0) = 0$ folgt direkt, dass $B = 0$ sein muss. Bei $\psi(a) = 0$ gibt es zwei Möglichkeiten, wobei die eine mit $A = 0$ wenig Sinn macht, da dies der triviale Fall mit $\Psi(x) = 0$ ist. Die zweite Möglichkeit folgt aus $\sin ka = 0$:

$$ka = n\pi \qquad , n \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

Wobei $k = 0 \;\Leftrightarrow\; n = 0$ wieder auf den trivialen Fall führt. Wir haben jetz allein aus den Randbetrachtungen eine Bedingung für die möglichen Energien erhalten:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}\; n^2 \tag{14}$$

Die Grundzustandsenergie ist $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \neq 0$

(b) Um die vollständige Wellenfunktion zu erhalten fehlt noch die Normierung.

$$\int\limits_0^a dx\ |A|^2 \sin^2 kx = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

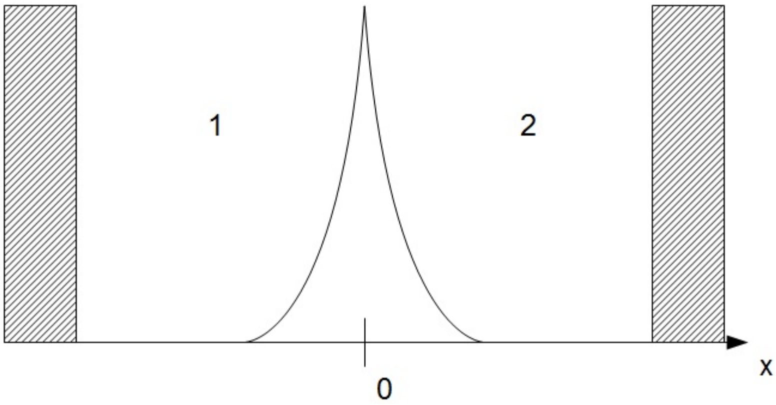
Die Lösungen sind also:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \qquad , n = 1, 2, 3... \tag{15}$$

Um die Orthogonalität zu zeigen betrachte den Fall $m \neq n$:

$$\begin{aligned}
\int dx\ \psi_m^* \psi_n &= \frac{2}{a} \int_0^a dx\ \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \\
&= \frac{1}{a} \int_0^a dx\ \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]_0^a \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} - \frac{\sin\left[(m+n)\pi\right]}{m+n}\right] = 0
\end{aligned}$$

3 δ im Topf



(a) Für die zwei Bereiche ergeben sich folgende Ansätze:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi_2 = A'e^{ikx} + B'e^{-ikx} \tag{16}$$

Die Bedingungen an die WF lauten:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \psi_1(-a) = \psi_2(a) = 0 \\
&\text{(ii)} \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) \\
&\text{(iii)} \quad \psi_2'(0) - \psi_1'(0) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0) \qquad \text{(SG integrieren,...)}
\end{aligned}$$

(b) Aus (i) folgt nun:

$$\begin{aligned}
Ae^{-ika} + Be^{ika} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad B = -Ae^{-2ika} \\
A'e^{ika} + B'e^{-ika} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad B' = -A'e^{2ika}
\end{aligned}$$

eingesetzt in die Wellengleichungen folgt:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= A\left(e^{ikx} - e^{-2ika}e^{-ikx}\right) = Ae^{-ika}\left(e^{ikx+ika} - e^{-ikx-ika}\right) \\
&= 2iAe^{-ika}\sin\left(k(x+a)\right) = C\sin\left(k(x+a)\right)
\end{aligned}$$

analog für ψ_2:

$$\psi_2 = 2iA'e^{ika}\sin\left(k(x-a)\right) = C'\sin\left(k(x-a)\right)$$

Bedingung (iii) ergibt:

$$C'k\cos(ka) - Ck\cos(ka) = \frac{2\lambda m}{\hbar^2}C\sin(ka) \tag{17}$$

Beim Betrachten von (ii) folgt eine Fallunterscheidung:

$$C\sin(ka) = C'\sin(-ka) \tag{18}$$

1. Fall: Die Gleichung ist erfüllt für

$$k = \frac{n\pi}{a} \tag{19}$$

($\sin(-ka) = -\sin(ka)$ schon möglich, aber ich darf nicht mehr kürzen da $\sin(n\pi) = 0$)

Damit folgt aus Gleichung 17:

$$C'k(-1)^n - Ck(-1)^n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = C'$$

Damit ergeben sich die Wellenfunktionen zu:

$$\psi_1 = C\sin\left(\frac{n\pi}{a}x + n\pi\right) \qquad \psi_2 = C\sin\left(\frac{n\pi}{a}x - n\pi\right)$$

$$\boxed{\psi_1 = \psi_2 = C(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

In diesem Fall bekommen wir also antisymetrische Lösungen.

2. Fall: $\left(k \neq \frac{n\pi}{a}\right)$

Aus Gl. 18 folgt $C = -C'$. Gleichung 17 ergibt sich hier zu:

$$kC'(\cos ka + \cos ka) = -\frac{2\lambda m}{\hbar^2}C'\sin ka \qquad \Rightarrow \qquad k = -\frac{m}{\hbar^2}\tan ka$$

Die symmetrische Lösung sieht dann wie folgt aus:

$$\boxed{\psi = C \begin{cases} \sin\left(k(x+a)\right) & , x < 0 \\ -\sin\left(k(x-a)\right) & , x > 0 \end{cases}} \tag{20}$$

(c) Antisymmetrische Lsg:

$$|C|^2 \int_{-a}^{a} dx\ \sin^2 kx = |C|^2 \underbrace{\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin 2kx\right]_{-a}^{a}}_{=a} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Symmetrische Lsg:

$$|C|^2 \left[\int_{-a}^{0} dx\ \sin^2\left(k(x+a)\right) + \int_{0}^{a} dx\ \sin^2\left(k(x-a)\right)\right]$$

$$|C|^2 \left(\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin\left(2k(x+a)\right)\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin\left(2k(x-a)\right)\right]_{0}^{a}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad C = \left[a - \frac{1}{2k}\sin(2ka)\right]^{-\frac{1}{2}}$$