Musterlösung Freitag

Stefan Vogl

Freitag, 19. März 2010

1 Multiple Choice

1. Ist das elektrische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung q im Bezugssystem eines ruhenden Beobachters radial und isotrop bzgl.. der Position der Punktladung?

   □ radial und isotrop

   ☑ radial aber nicht isotrop

   □ isotrop aber nicht radial

   □ weder radial noch isotrop

2. Eine ebene elektromagnetische Welle wird durch das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{a}\exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$ und das skalare Potential $\Phi = \Phi exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$ beschrieben, also $A^\mu = a^\mu exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t]$. Welche Bedingung reicht aus damit $\vec{A}$ und Φ der Lorentz-Eichung genügen

   □ $\vec{k}\vec{a} = 0$

   ☑ $k_\mu A^\mu = 0$

   □ $\Phi = 0$

   □ $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

3. Welche der folgenden Größen einer Ladungsdichte ist Lorentz-invariant?

   □ Ladungsverteilung $\rho(\vec{r},t)$

   □ Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$

   ☑ Gesamtladungsverteilung $Q = \int \rho(\vec{r},t)d^3r$

   □ Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r},t)d^3r$

4. Man betrachte den Abstand ds^2 des Ortes $x^\mu = (5,3,0,3)$ vom Ursprung. Welche der Folgenden Aussagen ist richtig?

   □ Der Abstand ist lichtartig?

   □ Der Abstand ist raumartig?

   ☑ Der Abstand ist zeitartig?

2 Zwillingsparadoxon

Die Bordzeit der Rakete ist die Eigenzeit des Astronauten. Für die Zeit im System des Beobachters und die Eigenzeit eines bewegten Objekts gilt:

$$t_{Eigen} = \gamma t \tag{1}$$

Mit der gegebenen Geschwindigkeit ist $\gamma = \frac{13}{5}$. Der Zwilling auf der Erde ist also $10 \cdot \frac{13}{5} = 26$ Jahre gealtert.

Das scheinbare Paradoxon beruht darauf, dass die Wege der beiden Zwillinge nicht äquivalent sind. Die Rakete wird beim Wenden beschleunigt. Der Astronaut befindet sich also nicht in einem Inertialsystem, sondern durchläuft mindestens zwei.

3 Lichtuhr

1. Die Ereignisse Senden und Empfangen könne in K' durch die Vierervektoren $x'_1 = (0, 0, 0, 0)$ und $x'_2 = (cT', 0, 0, 0)$ beschrieben werden. Durch Anwendung der Lorentztransformation erhält man die korrespondierenden Vierervektoren in K. Der erste $x_1 = (0, 0, 0, 0)$ ist trivial und der zweite $x_2 = (cT, x, 0, 0) = (\gamma cT', \beta\gamma cT', 0, 0)$. Damit ist die Periodendauer $T = \gamma T'$.

2. Der Effekt ist als Zeitdilatation bekannt.

3. Wenn man das Bild aus der Angabe betrachtet sieht man, dass der Strahl eine Strecke in Bewegungsrichtung zurücklegt. Diese Strecke hat die Länge vT und wir definieren die Hälfte als $x = \frac{vT}{2}$. Mit dem Satz von Pythagoras erhält man:

$$T = \frac{2\sqrt{l^2 + x^2}}{c} \tag{2}$$

Damit folgt:

$$x = \frac{vT}{2} = \frac{v}{c}\sqrt{l^2 + x^2} \Longrightarrow x^2 = \frac{\frac{v^2 l^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{2x}{v} = \frac{\frac{2l}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma T' \tag{4}$$

4 Lorentztransformation in y Richtung

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

5 Rapidität

1. Es gilt : $\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$ und $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\theta}} = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\cosh^2\theta - \sinh^2\theta}} = \cosh\theta \tag{6}$$

$$\beta = \tanh\theta \Longrightarrow \beta\gamma = \cosh\theta\tanh\theta = \sinh\theta \tag{7}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Zum Vergleich noch eine Rotationsmatrix:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Man kann also ein Lorentztransformation als eine Art Rotation zwischen Orts- und Zeitachse auffassen.

2.

$$u\text{‘} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \Longrightarrow \tanh\bar{\Phi} = \frac{\tanh\Phi + \tanh\Theta}{1+\tanh\Phi\tanh\Theta} = \tanh(\Phi+\Theta) \tag{10}$$

Daraus kann man nun einfach ablesen: $\bar{\Phi} = \Phi + \Theta$. Rapiditäten können also einfach addiert werden.

6 Ebene elektromagnetische Welle

1. Es gilt die Dispersionsrelation $kc = \omega$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0\cos(kx-\omega t)e_y \tag{11}$$
$$\vec{B}(x,y,z,t) = E_0/c\cos(kx-\omega t)e_z \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

2.

$$E'_x = E'_z = 0 \tag{14}$$
$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = \gamma E_0(\cos(kx-\omega t) - \frac{v}{c}\cos(kx-\omega t)) = \alpha E_0\cos(kx-\omega t) \tag{15}$$

Hierbei ist $\alpha = \gamma(1-\frac{v}{c})$. Analog erhält man für $\vec{B}$:

$$B'_x = B'_y = 0 \tag{16}$$
$$B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) = \gamma\frac{E_0}{c}(\cos(kx-\omega t) - \frac{v}{c}\cos(kx-\omega t)) = \alpha\frac{E_0}{c}\cos(kx-\omega t) \tag{17}$$

Grundsätzlich müssen wir nun noch eine Transformation der Koordinaten durchführen um von $\vec{E}'(t,x,y,z)$ zu $\vec{E}'(t',x',y',z')$ kommen. Allerdings ist die Phase einer Ebenenwelle ein Lorentzskalar , wir können $\omega t - kx$ einfach durch $\omega' t' - k'x'$ ersetzen. Es gilt weiterhin:

$$k' = \gamma(k - \beta\frac{\omega}{c}) = \gamma(k - \beta k) = \alpha k \quad \omega = kc \tag{18}$$

und analog:

$$\omega' = \alpha\omega \tag{19}$$

3. Dies ist die relativistische Dopplerverschiebung

$$\omega' = \alpha\omega = \omega\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \tag{20}$$

4. Die Intensität I in K' ist:

$$I = \vec{E}^2 = E^2{}_0\frac{1-v/c}{1+v/c} \tag{21}$$

Daraus kann man ablesen: $v \to c \Rightarrow I \to 0$ Die elektromagnetische Welle verschwindet also wenn v gegen c geht.

7 Homogene Felder

1.

$$E_1' = E_1 = 0 \tag{22}$$
$$E_2' = \gamma(E_2 - c\beta B_3) = -\gamma c\beta B_3 = -2\gamma\beta E_0 \cos\theta \tag{23}$$
$$E_3' = \gamma(E_3 + c\beta B_2) = \gamma E_0(1 + 2\beta \sin\theta) \tag{24}$$

$$B_1' = B_1 = 0 \tag{25}$$
$$B_2' = \gamma(B_2 + \beta/cE_3) = \gamma/cE_0(2\sin\theta + \beta) \tag{26}$$
$$B_3' = \gamma(B_3 - \beta/cE_2) = 2\gamma/cE_0 \cos\theta \tag{27}$$

2.

$$\vec{E}' \| \vec{B}' \Rightarrow \frac{E_2'}{B'2} = \frac{E_3'}{B_3'} \tag{28}$$
$$\Rightarrow \frac{2\gamma\beta e_0 \cos\theta}{\gamma/cE_0(2\sin\theta} = \frac{\gamma E_0(1 + 2\beta\sin\theta)}{2\gamma/cE_o \cos\theta} \tag{29}$$
$$\Rightarrow \frac{-2\beta\cos\theta}{1\sin\theta + \beta} = \frac{1 + 2\beta\sin\theta}{2\cos\theta} \Rightarrow 2\beta^2 + 5\beta + 2\sin\theta \tag{30}$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16\sin{}^2\theta}}{4\sin\theta} \tag{31}$$

Falls $\theta = 0$ ist sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ parallel und dann muss $\beta = 0$ sein. Deshalb ist Plus das richtige Vorzeichen in der letzten Gleichung:

$$\beta = \frac{-5 + \sqrt{25 - 16\sin{}^2\theta}}{4\sin\theta} \tag{32}$$

Für kleine Werte von θ gilt:

$$\beta \approx \frac{-5 + 5(1 - \frac{16}{25}\theta^2)^{1/2}}{4\theta} \approx \frac{-5 + 5 - \frac{8}{5}\theta^2}{4\theta} \approx -\frac{2}{5}\theta \tag{33}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \approx 1 + \frac{2}{25\theta^2} \tag{34}$$
$$\vec{E}' \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5\theta} \\ 1 \end{pmatrix} E_0 \;\; und \;\; \vec{B}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5} \\ 2 \end{pmatrix} E_0/c \tag{35}$$

Für $\theta \to \pi/2$:

$$\beta \to -1/2 \;\; \gamma \to 2/\sqrt{3} \tag{36}$$
$$\vec{E}' \approx \vec{0} \;\; und \;\; \vec{B}' \approx \sqrt{3}E_0/ce_y \tag{37}$$

8 Lorentzinvarianten

- $\partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A}$ Lorentzeichung: $\partial^\mu A_\mu = 0$
- $\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\partial^2 t - \vec{\nabla}^2$ Wellengleichung : $\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \mu_0 j_\nu$
- $k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k}\vec{x}$ Phase
- $k^\mu k_\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2$ Dispersionsrelation: $\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2$
- $\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} - \vec{\nabla}\vec{j}$ Kontinuitätsgleichung: $\partial^\mu j_\mu = 0$

9 Stromführender Draht

- Um im Bezugssystem des Drahtes K das elektrische Feld zu berechnen, erinnert man sich an die Kon struktionen von Hilfsvolumina und die Anwendung des Satzes von Gauß auf den ersten Ubungsblättern. Damit erhält man für das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\rho'\epsilon_0} \tag{38}$$

Hierbei wurden im gestrichenen System Zylinderkoordinaten verwendet und es gilt: $\rho' = x'^2 + y'^2$. Weiterhin liegt kein Magnetfeld vor, $\vec{B}'(\vec{r}') = 0$. Für die Transformation ins Sytem K verwendet man die Formeln:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E}' + c\beta \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{E}) \tag{39}$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B}' - \frac{1}{c}\beta \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{B}) \tag{40}$$

Hier ersetzt man $\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$ mit $\vec{\beta} = ve_z$. Somit ergibt sich:

$$\vec{E} = \gamma\vec{E}' = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0}e_\phi \tag{41}$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{c}\vec{\beta} \times \vec{E}' = \frac{\gamma\mu_0\lambda v}{2\pi\rho}e_\theta \tag{42}$$

Die Koordinaten transformieren sich über $X' = \Lambda(\vec{v})X$. Da hier aber der Boost in z-Richtung geht, folgt $x' = x$ und $y' = y$, daher auch $\rho' = \rho$, $e'_\phi = e_\phi$ und $e_\theta = e_\theta$.

- Im Ruhesystem des Drahtes K gilt:

$$\vec{j}'^\mu = (c\lambda, 0, 0, 0)^T \frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'} \tag{43}$$

Es gilt: $\Lambda(-v)j'^\nu = j^\mu$. Damit ergibt sich in K:

$$\vec{j}^\mu = (\gamma c\lambda, 0, 0, \beta\gamma c\lambda)^T \frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'} \tag{44}$$

¨ Mit dieser Ladungs- und Stromverteilung bestimmt man nun wieder über die gewohnten Konstruktionsmethoden mit den Sätzen von Gauß und Stokes das elektrische und das magnetische Feld und erhält:

$$\vec{E} = \gamma\vec{E}' = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0}e_\phi \tag{45}$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{c}\vec{\beta} \times \vec{E}' = \frac{\gamma\mu_0\lambda v}{2\pi\rho} \tag{46}$$