Wellen und Dipolstrahlung - Lösungen

Florian Hrubesch

18. März 2010

1 Multiple Choice Aufgaben

1.1 Polarisation von Wellen, Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an

Es handelt sich um elektromagnetische Wellen im Vakuum.

- ● Die Wellen sind transversal.
- ○ Das E und das B Feld sind nicht in Phase.
- ○ Der Poynting Vektor ist antiparallel zum Wellenvektor.
- ● E,B und Wellenvektor stehen senkrecht aufeinander

1.2 Mit welcher Ordnung fällt der Poyntingvektor der Dipolstrahlung ab?

- ○ $\vec{S} \propto r$
- ○ $\vec{S} \propto \frac{1}{r^3}$
- ○ $\vec{S} \propto \frac{1}{r}$
- ● $\vec{S} \propto \frac{1}{r^2}$

2 Wellengleichung im Vakuum

Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen im Vakuum die Wellengleichung her.
Hinweis: Benutzen Sie die folgende Vektoridentität:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \tag{1}$$

Die Maxwellgleichungen im Vakuum lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3}$$

Wir wenden jetzt die Rotation auf 3 an:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)}_{= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \tag{5}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{6}$$

3 Proportionalität der Amplituden des E- und B-Feldes

Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen in Materie (Nichtleiter!) die Bedingung für die Proportionalität der E- und B-Felder für ebene Wellen her.

Die Proportionalität folgt aus der Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{7}$$

Mit dem Ansatz für planare Ebene Wellen:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x \tag{8}$$

erhält man:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = E_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{e}_x\right) e^{i(kz-\omega t)} \tag{9}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = ikE_0 e^{i(kz-\omega t)} \vec{e}_y \tag{10}$$

$$\vec{B} = -ikE_0 \vec{e}_y \int e^{i(kz-\omega t)} = \frac{k}{\omega} E_0 \vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \tag{11}$$

4 Strahlungsdruck der Sonne auf die Erde

Gehen Sie davon aus, dass die Erde alle auf Sie einfallende Strahlung absorbiert. Die Intensität der Auf der Erde eintreffende Strahlung is in etwa $1300 \frac{W}{m^2}$

Welchen Druck übt das einfallende Sonnenlicht aus? Vergleichen sie diesen Druck mit dem Atmosphärendruck.

Aus der Vorlesung:

$$P = \frac{I}{c} = \frac{1300\frac{W}{m^2}}{3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} \approx 4.3 \cdot 10^{-6} Pa \tag{12}$$

Der Atmosphärendruck beträgt $1000hPa$. Der Druck den das Licht ausübt ist also verschwindend gering.

5 Senkrechter Einfall von Wellen auf einen Leiter

Die allgemeinen Randbedingungen beim Übergang von einem Medium in das nächste sind:

$$\epsilon_1 \vec{E}_1^{\perp} - \epsilon_2 \vec{E}_2^{\perp} = \sigma_f \qquad \vec{E}_1^{\parallel} - \vec{E}_1^{\parallel} = 0 \tag{13}$$

$$\vec{B}_1^{\perp} - \vec{B}_2^{\perp} = 0 \qquad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n} \tag{14}$$

Mit der freien Oberflächenladung σ_f, dem freien Oberflächenstrom $\vec{K}_f$ und der Normale auf die Grenzfläche $\hat{n}$. Betrachten sie nun eine vom Vakuum senkrecht auf eine Leiter mit Leitfähigkeit σ fallende Elektromagnetische Welle.

a) Stellen Sie E und B Feld der einfallenden, reflektierten und transmitierten Welle auf.

$$\vec{E}_e(z,t) = \vec{E}_{e0} e^{i(k_e z - \omega t)} \qquad \vec{B}_e(z,t) = \frac{k_e}{\omega}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}_{e0}\right) e^{i(k_e z - \omega t)} \tag{15}$$

$$\vec{E}_r(z,t) = \vec{E}_{r0} e^{i(-k_e z - \omega t)} \qquad \vec{B}_e(z,t) = \frac{-k_e}{\omega}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}_{r0}\right) e^{i(-k_e z - \omega t)} \tag{16}$$

$$\vec{E}_t(z,t) = \vec{E}_{t0} e^{i(\tilde{k}_t z - \omega t)} \qquad \vec{B}_t(z,t) = \frac{\tilde{k}_t}{\omega}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}_{t0}\right) e^{i(\tilde{k}_t z - \omega t)} \tag{17}$$

b) Zeigen Sie dass keine Oberflächenladungen existieren. Hinweis: EM-Wellen sind transversal.

Bei transversalen Wellen ist das E-Feld parallel zur Ausbreitungsrichtung 0. Aus der Randbedingung für das senkrechte E-Feld Folgt also:

$$\sigma_f = \epsilon_1 \vec{E}_1^{\perp} - \epsilon_2 \vec{E}_2^{\perp} = 0 \tag{18}$$

c) Ausgehend davon, dass keine Oberflächenströme existieren, leiten Sie die Amplituden der reflektierten und transmitierten Wellen her.

Wir starten mit den Randbedingungen:

$$\vec{E}_1^{\parallel} - \vec{E}_2^{\parallel} = 0 \qquad\qquad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{\parallel} = 0 \tag{19}$$

Und erhalten:

$$E_{e0} + E_{r0} = E_{t0} \tag{20}$$

$$\frac{k_e}{\mu_1\omega}(E_{e0} - E_{r0}) = \frac{\tilde{k}_t}{\mu_2\omega}E_{t0} \tag{21}$$

$$E_{e0} - E_{r0} = \frac{\tilde{k}_t\mu_1}{k_e\mu_2}E_{t0} = \tilde{\beta}E_{t0} \tag{22}$$

$$E_{r0} = \left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}\right)E_{e0} \tag{23}$$

$$E_{t0} = \left(\frac{2}{1+\tilde{\beta}}\right)E_{e0} \tag{24}$$

d) Um genauer aussagen zu können, was tatsächlich bei der Reflektion an Leitern passiert, muss man die Wellenzahl $\tilde{k}$ im Leiter kennen. Setzen sie dazu die Lösung für Wellen in Leitern in die Wellengleichung im Leiter ein. Gehen sie nur bis zur Bestimmungsgleichung für $\tilde{k}^2$ vor. Wie wäre ab hier das weitere vorgehen?

Zunächst die Wellengleichung und deren Lösung im Leiter (Nur E-Feld):

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \tag{26}$$

Einsetzen liefert:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\tilde{k}^2\vec{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \tag{27}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \tag{29}$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \tag{30}$$

Um an $\tilde{k} = k + i\kappa$ zu gelangen quadriert man $\tilde{k}$ und erhält durch Vergleich der rellen und imaginären Anteile Bestimmungsgleichungen für k und κ

e) Die Lösungen für $\tilde{k} = k + i\kappa$ lauten:

$$k = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}+1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

$$\kappa = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}-1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

Was passiert, wenn die Leitfähigkeit des Leiters gegen unendlich geht? Was können sie über Phase der einfallenden und transmitierten Welle sagen?

Wenn σ gegen unendlich geht, geht $\tilde{k}$ gegen unendlich und somit auch $\tilde{\beta}$. Für die reflektierte und transmitierte Amplitude gilt also mit 23 und 24:

$$E_{r0} = -E_{e0} \qquad\qquad E_{t0} = 0 \tag{33}$$

6 Polarisation der transmitierten und reflektierten Welle in Abhängigkeit der einfallenden Welle

In der Vorlesung wird davon Ausgegangen, dass einfallende, reflektierte und transmitierte Welle alle gleich Polarisiert sind. Zeigen Sie, dass dies so sein muss. Hinweis: Setzen Sie die Polarisation der reflektierten und der transmitierten Welle einer Senkrecht entlang der z-Achse einfallenden, in x-Richtung polarisierten Welle wie folgt an:

$$\vec{n}_t = \cos\theta_t\vec{e}_x + \sin\theta_t\vec{e}_y \tag{34}$$

$$\vec{n}_r = \cos\theta_r\vec{e}_x + \sin\theta_r\vec{e}_y \tag{35}$$

Aus den Randbedingungen im Vakuum erhalten wir die folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$E_{e0}\vec{e}_x + E_{r0}\vec{n}_r = E_{t0}\vec{n}_t \tag{36}$$

$$E_{e0}\vec{e}_y - E_{r0}(\vec{e}_\times\vec{n}_r) = \beta E_{t0}(\vec{e}_z \times \vec{n}_t) \tag{37}$$

Die y-Komponente von Gleichung 36 ergibt:

$$E_{r0}\sin\theta_r = E_{t0}\sin\theta_t \tag{38}$$

Während die x-Komponente von Gleichung 37 ergibt:

$$E_{r0} \sin \theta r = -\beta E_{t0} \sin \theta_t \tag{39}$$

Beide Gleichungen können gleichzeitig nur für $\theta_r = \theta_t = 0$ erfüllt werden. Damit ist die reflektierte und die transmitierte Welle genauso polarisierte wie die einfallende Welle.

7 Brechung von Wellen mit beliebigem Einfallswinkel

Eine Welle aus Medium 1 trifft unter dem Winkel θ zur Flächennormale auf Medium 2. Die Grenzfläche sei die x-y Ebene. Das elektrische Feld sei parallel zur Einfallsebene polarisiert. Die Einfallsebene sei O.b.d.A die x-z Ebene.

a) Stellen Sie die Amplituden der transmitierten und der reflektierten Welle durch die der einfallenden Welle dar. Hinweis: Randbedingungen! Hinweis 2: Führen Sie $\alpha = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_e}$ und $\beta = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}$ ein.

   Die Wellenfunktionen der einfallenden, refleketierten und transmitierten Wellen sind:

$$\vec{E}_e(\vec{r}, t) = \vec{E}_{e0} e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}_e(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_1} \left(\vec{e}_{k_e} \times \vec{E}_e(\vec{r}, t) \right) \tag{40}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}_r(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_1} \left(\vec{e}_{k_r} \times \vec{E}_r(\vec{r}, t) \right) \tag{41}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_{t0} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}_t(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_2} \left(\vec{e}_{k_t} \times \vec{E}_t(\vec{r}, t) \right) \tag{42}$$

   Aus der Vorlesung wissen wir, dass die komplexen Exponentialfunktionen alle gleich sind. Die Randbedingung liefern uns also:

$$\epsilon_1 \left(\vec{E}_{e0} + \vec{E}_{r0} \right)_z = \epsilon_2 \left(\vec{E}_{t0} \right)_z \tag{43}$$

$$\left(\vec{B}_{e0} + \vec{B}_{r0} \right)_z = \left(\vec{B}_{t0} \right)_z \tag{44}$$

$$\left(\vec{E}_{e0} + \vec{E}_{r0} \right)_{x,y} = \left(\vec{E}_{t0} \right)_{x,y} \tag{45}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\vec{B}_{e0} + \vec{B}_{r0} \right)_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} \left(\vec{B}_{t0} \right)_{x,y} \tag{46}$$

   Die B-Felder haben keinen z-Anteil, Gleichung 44 liefert also keine Informationen. Die Gleichung 43 wird zu:

$$\epsilon_1 (E_{e0} \sin \theta_e - E_{r0} \sin \theta_r) = \epsilon_2 (E_{t0} \sin \theta_t) \tag{47}$$

Aus Gleichung 45 folgt:

$$E_{e0}\cos\theta_e + E_{r0}\cos\theta_e = E_{t0}\cos\theta_t \tag{48}$$

Und Gleichung 46 liefert (B-Felder alle in y-Richtung und parallel zur Mediengrenze)

$$\frac{1}{\mu_1 c_1}(E_{e0} - E_{r0}) = \frac{1}{\mu_2 c_2}E_{t0} \tag{49}$$

Nun führen wir $\alpha = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_e}$ und $\beta = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}$ ein und erhalten:

$$E_{e0} - E_{r0} = \beta E_{t0} \tag{50}$$

$$E_{e0} + E_{r0} = \alpha E_{t0} \tag{51}$$

Das so entstehende Gleichungssystem können wir wieder nach der reflektierten und der transmitierten Amplitude lösen:

$$E_{r0} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)E_{e0} \tag{52}$$

$$E_{t0} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right)E_{e0} \tag{53}$$

b) Es gibt einen Einfallswinkel, bei dem keine reflektierte Welle existiert ($E_r = 0$). Stellen Sie diesen Winkel durch die Brechungsindizes und β dar.
Damit es keine reflektierte Welle gibt, muss die Amplitude der reflektierten Welle verschwinden. Dies ist der Fall für $\alpha = \beta$.

$$\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_e} = \beta \tag{54}$$

$$\frac{\cos^2\theta_t}{\cos^2\theta_e} = \beta^2 \tag{55}$$

$$1 - \sin^2\theta_t = \beta^2 - \beta^2\sin^2\theta_e \tag{56}$$

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_e = \beta^2 - \beta^2\sin^2\theta_e \tag{57}$$

$$\sin^2\theta_e = \frac{1 - \beta^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \beta^2} \tag{58}$$

8 elektrische Dipolstrahlung

a) Ausgehend von dem retardierten elektrischen Potential (Gleichung 66) aus der Vorlesung. Führen Sie der Reihe nach die angegebenen Näherungen durch und entwickeln sie die betreffenden Ausdrücke jeweils in erster Ordnung um schließlich auf Gleichung 67 zu kommen.

Wir starten mit:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\cos\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{r}-a\vec{e}_z|}{c}\right)\right)}{|\vec{r}-a\vec{e}_z|} - \frac{\cos\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{r}+a\vec{e}_z|}{c}\right)\right)}{|\vec{r}+a\vec{e}_z|}\right) \tag{59}$$

Der Ausdruck, den wir entwickeln können ist:

$$|\vec{r}\pm a\vec{e}_z| = \sqrt{(\vec{r}\pm a\vec{e}_z)^2} = \sqrt{\vec{r}^2 \pm a\vec{r}\cdot\vec{e}_z + a^2} = r\left(1\pm\frac{2a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{60}$$

Nun setzen wir Näherung 1 ($a << r$) an:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{1}{2}(n-1)nx^2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nx^3+O(x^4) \tag{61}$$

Wir wollen die Näherung in 1. Ordnung betrachten. Wir erhalten also:

$$|\vec{r}\pm a\vec{e}_z| \approx r\left(1\pm\frac{a}{r}\cos\theta\right) \tag{62}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}\pm a\vec{e}_z|} \approx \frac{1}{r}\left(1\mp\frac{a}{r}\cos\theta\right) \tag{63}$$

Und für die einzelnen Terme des Potentials:

$$\frac{\pm q_0}{r}(1\pm\underbrace{\frac{a}{r}\cos\theta)}_{O(1/r^2)}\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\pm\frac{\omega a}{c}\cos\theta\right) \tag{64}$$

$$\frac{\pm q_0}{r}\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\pm\frac{\omega a}{c}\cos\theta\right) \tag{65}$$

In Gleichung 64 wurde im Endeffekt schon die dritte Näherung eingebaut. Man kann den Ausdruck auch stehen lassen und zum Schluss nähern. Mit den Additionstheoremen für cosinus:

$$\frac{\pm q_0}{r}\left(\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\cos\left(\frac{\omega a}{c}\cos\theta\right)\mp\sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\sin\left(\frac{\omega a}{c}\cos\theta\right)\right) \tag{66}$$

Nun setzen wir die zweite Näherung ($a << \frac{c}{\omega}$) an und entwickeln die entsprechenden $\cos$ und $\sin$:

$$\frac{\pm q_0}{r}\Big(\cos\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big) \mp \sin\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big)\frac{\omega a}{c}\cos\theta\Big) \tag{67}$$

Eingesetzt in das retardierte Potential erhält man:

$$V(r,\theta,t) = \frac{-2q_0\omega a}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big) \tag{68}$$

$$= \frac{-p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big) \tag{69}$$

b) Berechnen Sie ausgehend von den Potentialen für das Strahlungsfeld die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder. Berechnen Sie damit den Poynting Vektor. Beschreiben Sie die Abstrahlcharakteristik des Dipols.

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta \tag{70}$$

$$= \frac{-p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\cos\theta\left(-\frac{1}{r^2}\sin\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big) - \frac{\omega}{rc}\cos\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big)\right)\vec{e}_r - \frac{\sin\theta}{r^2}\sin\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big)\vec{e}_\theta\right) \tag{71}$$

Mit Näherung 3 kann man den 1. und den 3. Term vernachlässigen:

$$\vec{\nabla}V \approx \frac{p_0\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\cos\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big) \tag{72}$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\cos\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big)(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \tag{73}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big)\vec{e}_\theta \tag{74}$$

Für das B-Feld müssen wir noch die Rotation von A berechnen:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi \tag{75}$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\cos\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big) + \frac{\sin\theta}{r}\sin\Big(\omega\Big(t-\frac{r}{c}\Big)\Big)\right) \tag{76}$$

Der zweite Term fällt wieder durch Näherung 3 weg und wir erhalten:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\vec{e}_\phi \tag{77}$$

Der Poynting Vektor ist nun:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\right)^2 \vec{e}_r \tag{78}$$

Der Dipol strahlt am stärksten für $\theta = 0$ und überhaupt nicht für $\theta = \pi/2$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Poynting Vektors (Gleichung 72) die vom Dipol in den gesamten Raum abgestrahlte Leistung.

Wir müssen zunächst den Poynting Vektor über die Zeit Mitteln:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{e}_r \tag{79}$$

$$P = \int \left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \tag{80}$$