1 Lösung

Multiple choice:

- Welche „Bewegung“ führen die retardierten Potentiale bei Abwesenheit von Strömen und Ladungen durch?
  ☐ Sie sind komplett Null
  ☒ Wellenbewegung
  ☐ Sie sind konstant
  ☐ Kreisbahnen
  Wenn keine Ladungen und Ströme vorhanden sind erfüllen die Potentiale homogenen Wellengleichungen,deren allgemeinste Lösungen Wellen sind. Nur dadurch können sich elektromagnetische Wellen losgelöst von den Strömungen und Ladungen ausbreiten. Allerdings darf in der physikalischen Realität man nicht vergessen, dass diese irgendwann auch von Strömen und Ladungen erzeugt worden sein müssen. Diese müssen aber zum jetzigen Zeitpunkt nicht mehr vorhanden sein.

- Wer verrichtet Arbeit, wenn eine Leiterschleife mit konstanter Geschwindigkeit aus einem homogenen Magnetfeld gezogen wird?
  ☐ Das Magnetfeld
  ☒ Der, der zieht.
  ☐ Das elektrische Feld

- Eine Leiterschleife mit einer Spannungsquelle, die für konstanten Strom sorgt, befindet sich in einem Magnetfeld. Dieses ist so orientiert , dass die Leiterschleife durch die Lorentkraft gegen die Gewichtskraft nach oben gehoben wird. Wer verrichtet Arbeit?
  ☐ Niemand
  ☐ Das Magnetfeld
  ☒ Die Spannungsquelle
  ☐ Die Schleife verliert Masse und damit potentielle Energie.

- Warum verwendet man die avancierten Potentiale nicht als Lösung?
  ☒ Wegen des Kausalitätsprinzips
  ☐ Sie widersprechen der speziellen Relativitätstheorie.
  ☐ Sie sind singulär am Zeitursprung
  ☐ Sie divergieren

- Auf welcher Bahnkurve bewegt sich ein positiv geladenes Teilchen, dass ich in einem Feld $\vec{E} = |E|\,\hat{e}_y$ und $\vec{B} = |B|\,\hat{e}_x$ befindet? Zur Anfangszeit ruht das Teilchen.
  ☐ Kreisbahn
  ☐ Parabel
  ☒ Zykloide
  ☐ Gerade
  ☐ Schraubenlinie

2 Lösung

1.Lösungsweg: Wähle eine beliebige Oberfläche A_1 zur Grenzlinie γ. Dann gilt:

$$\Phi = \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{A_1} \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{a} = \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Letzteres Integral ist unabhängig von der Oberfläche A_1

2. Lösungsweg: Wähle wieder eine beliebige Oberfläche A_1 zur Grenzlinie γ. Zusätzlich verwende die minimale Oberfläche A_{min} zu γ. Diese lässt sich finden, da beispielsweise Seifenlauge diese Fläche bildet. Damit schließen A_1 und A_{min} ein Volumen V ein. Daraus folgt dann:

$$\Phi - \int_{A_{min}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{a} - \int_{A_{min}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_{A_1 \cup A_{min}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

Das Minuszeichen zu Beginn kommt aus der Konvention das der Flächennormalenvektor bei geschlossenen Oberflächen immer nach außen gerichtet ist. Am Ende wird Satz von Gauß angewendet und die Tatsache, dass Magnetfelder divergenzfrei sind. Diese Rechnung zeigt nochmal, dass wegen der geschlossenen Feldlinien der magnetische Fluss durch ein geschlossenes Volumen immer verschwindet. Jetzt muss man nur noch auflösen:

$$\Phi = \int_{A_{min}} \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Es gibt also eine ausgezeichnete Fläche, die man zur Flussberechnung verwenden kann. Es ist aber jede beliebige möglich.

3 Lösung

Nach dem Farradayschen Induktionsgesetz gilt:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Integriert man das über die Fläche A der Leiterschleife erhält man:

$$\int_A \nabla \times \vec{E} = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dot{\Phi} = IR_{ges} - U_{ext}$$

Die Flussänderung kommt dabei aus dem Flächenintegral über die rechte Seite des Induktionsgesetztes, wogegen das Linienintegral die Spannungen an den Verbrauchern und sonstige Sapnnungsquellen aufsummiert.

Gäbe es keine induzierte Spannung, so würde obige Gleichung die Maschenregel wieder geben, nach der die Spannung U_{ext}, die am Stromkreis angelegt ist gleich der Verbraucherspannungen ist. Nach der rechten Handregel zeigt das Magnetfeld der Spule in die Zeichenebene. Da der Fluss zunimmt und die Fläche gleich bleibt, muss das Magnetfeld auch wachsen. Die Änderung zeigt also auch in die Ebenen. Damit finden wir aus:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

dass das elektrische Feld gegen den Uhrzeigersinn läuft, wobei wir wieder die rechte Handregel verwenden. Damit misst V_1 in Feldrichtung und V_2 gegen das Feld. Damit haben wir:$V1 = IR1$ und $V2 = -IR2$. Weiterhin gilt:

$$R_{ges} = R1 + R2$$

In diesem Fall gibt es keine äußere Spannungsquelle, demnach ist $U_{ext} = 0$ und aus der vorangegangenen Gleichung erhält man:

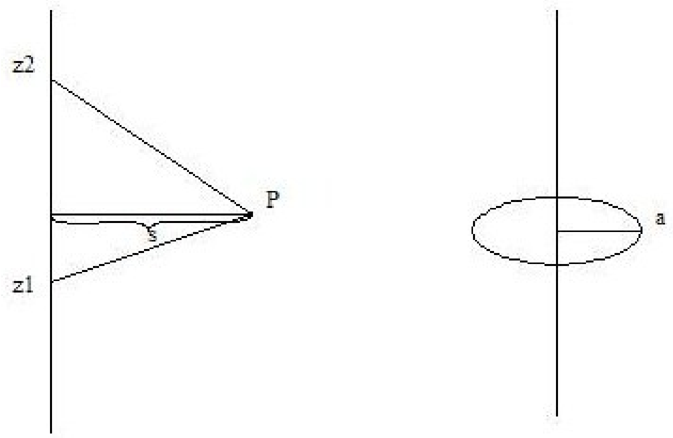
$$I = \frac{-\alpha}{R1 + R2} \quad \Rightarrow \quad V1 = -\frac{\alpha R1}{R1 + R2} \quad \Rightarrow \quad V2 = \frac{\alpha R2}{R1 + R2}$$

4 Lösung

a) Das Coulombsche Gesetz für eine Linienladung lautet:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dl \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Da nur Zeiten im angegebenen Zeitintervall in Betracht kommen, liegt z_1 unter der x-y-Ebene und z_2 darüber. Zeiten außerhalb dieser Zeitspanne kommen nicht in Betracht, da dann der normale Strom I durch die x-y-Ebene fließt. Wir



wählen den Punkt P beliebig in der x-y-Ebene, also $P(s\cos\phi, s\sin\phi, 0)$. Dann ist der Abstand zu einem Punkt auf der z-Achse:$\sqrt{s^2 + z^2}$. Die z-Komponente des Abstandsvektors von einem Punkt auf der z-Achse zu P ist $(\vec{r} - \vec{r}')_z = -z$. Dies setzen wir in das Integral ein:

$$E_z(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{\lambda z}{\sqrt{s^2 + z^2}^3} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{s^2 + z^2}} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + z_2^2}} \right)$$

Es ist einfacher an dieser Stelle z_1 und z_2 stehenzulassen.

b) Der Fluss durch die Kreisfläche berechnet sich über das Flächenintegral. Als Normale verwenden wir die positive z-Richtung:$d\vec{a} = s \cdot ds \cdot d\phi \hat{e}_z$

$$\Phi_{el} = \int_{K_a(0)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a ds \cdot sE_z = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a ds \frac{s}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + z_2^2}} \right) =$$

$$\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{s^2+z_1^2}-\sqrt{s^2+z_2^2}\right)|_0^a=\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z_1^2}-|z_1|-\sqrt{a^2+z_2^2}+|z_2|\right)$$

An dieser Stelle setzen wir die beiden z-Werte explizit ein und verwenden, dass $t\in\left[0,\frac{\epsilon}{v}\right]$ gilt. Deshalb fällt bei $z_2=vt$ der Betrag einfach weg, wogegen $z_1=vt-\epsilon$ beim Auflösen des Betrags ein Minus erhält:

$$\Phi_{el}=\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{a^2+(vt-\epsilon)^2}-\sqrt{a^2+(vt)^2}+2vt-\epsilon\right)$$

c) Nach dieser Vorarbeit lässt sich der Verschiebungsstrom nun ohne großen Aufwand berechnen. Zunächst überlegen wir uns den Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsstrom und dem elektrischen Fluss durch eine Fläche A:

$$I_v=\int_A\vec{j_d}\cdot d\vec{a}=\int_A\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{a}=\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_A\vec{E}d\vec{a}=\epsilon_0\dot{\Phi}_{el}$$

Mit diesem Resultat brauchen wir nur noch den Fluss aus Teil b) nach der Zeit zu differenzieren:

$$I_v^\epsilon=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{v^2t}{\sqrt{a^2+(vt-\epsilon)^2}}+\frac{v^2t}{\sqrt{a^2+(vt)^2}}+2v\right)$$

Zum Abschluss bilden wir noch den Grenzwert für $\epsilon\rightarrow\ 0$. Dabei können wir verwenden das $\lim_{\epsilon\to0}t=0$, da $0\leq t\leq\frac{\epsilon}{v}$. Damit finden wir:

$$I_v=\lim_{\epsilon\to0}I_v^\epsilon=\lim_{\epsilon\to0}\frac{\lambda}{2}\left(\underbrace{\frac{v^2t}{\sqrt{a^2+(vt-\epsilon)^2}}}_{\to0}-\underbrace{\frac{v^2t}{\sqrt{a^2+(vt)^2}}}_{\to0}+2v\right)=\lambda v=I$$

Der Verschiebungsstrom entspricht demnach wirklich dem realen Strom und führt konsequenter Weise nach der Maxwellgleichung $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ auf das gleiche Magnetfeld.

5 Lösung

a) Es gilt:$I=\dot{Q}$ und $I=\pi a^2 j$ mit der Stromdichte $\vec{j}=j\hat{e}_z$, wegen der räumlichen Gleichverteilung von I. Aus der zeitlichen Konstanz erhalten wir:

$$Q\left(t\right)=It+Q\left(t=0\right)=It$$

nach der Startbedingung. Daraus können wir für die Oberflächenladungsdichte σ schließen: $\sigma\left(t\right)=\frac{Q(t)}{a^2\pi}$. Wir kennen aber das elektrische Feld eines Plattenkondensators:

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{e}_z=\frac{It}{a^2\pi\epsilon_0}\hat{e}_z$$

Für das magnetische Feld verwenden wir das Ampèresche Gesetz:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\text{eingeschl.}} + I_{v\text{eingeschl.}} \right)$$

Wir verwenden einfach einen Kreis mit Radius s um die Achse des Drahtes. In der Lücke wird kein Strom I eingeschlossen, aber ein Verschiebungsstrom. Diesen berechnen wir nach den der Vorlesung:

$$\vec{j}_v = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{It}{a^2 \pi} \hat{e}_z$$

und führen nun das Wegintegral aus. Da der Verschiebungsstrom konstant entlang der z-Achse fließt, können wir annehmen, dass das magnetische Feld in azimutaler Richtung fließt. Die rechte Handregel zeigt uns, dass es die positive azimutale Richtung ist.

$$\oint_{K_s(0)} \vec{B} d\vec{l} = 2\pi s B = s^2 \pi j_v = \frac{Its^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{Its}{2\pi a^2} \hat{e}_\phi$$

Außerhalb der Lücke (für $s \geq a$) finden wir $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \hat{e}_\phi$, weil die Stromdichte ja nur bis zum Radius $s = a$ vorhanden ist.

Es gibt also überhaupt keinen Unterschied, ob ein "echter" Strom oder ein Verschiebungsstrom fließt.

b) Aus der Vorlesung entnehmen wir für die Energiedichte und setzen unsere Ergebnisse für die Lücke aus a) ein:

$$\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{I^2 t^2}{2a^4 \pi^2 \epsilon_0} + \frac{\mu_0 I^2 s^2}{8a^4 \pi^2}$$

Der Poynting-Vektor lautet:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) = \frac{I^2 st}{2a^4 \pi^2 \epsilon_0} \left(-\hat{e}_s \right)$$

Die Richtung erhalten wir über die rechte Handregel für das Kreuzprodukt. Die Energie fließt also in zentrale Richtung in den Kondensator hinein. Es bleibt noch die Frage der Energieerhaltung zu klären. Dazu müssen wir die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_{mech} + u_{em} \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

überprüfen. Da wir keine Ladungen im Kondensator haben, mit denen die Felder wechselwirken können, gibt es keine mechanische Energiedichte. Es bleibt:

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{I^2 t}{a^4 \pi^2 \epsilon_0}$$

Dabei fällt der magnetische Anteil sogar heraus, da das Feld statisch ist. Für die Divergenz des Poynting-Vektors benötigen wir nur den radialen a-Anteil, da $\vec{S}$ nur eine radiale Komponente besitzt:

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s S_s \right) = \frac{1}{s} \frac{-I^2 ts}{a^4 \pi^2 \epsilon_0} = -\frac{I^2 t}{a^4 \pi^2 \epsilon_0}$$

Die beiden Ergebnisse addieren sich tatsächlich zu Null und die Energieerhaltung ist gegegeben. Wie sieht es außerhalb des Kondensators bei $s \geq a$ aus? Dort gibt es kein elektrisches Feld. Damit ist u_{em} zeitunabhängig und der Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$ verschwindet. Also ist Energiebilanz trivial erfüllt.

c) In der Lücke gilt für die Gesamtenergie W:

$$W = \int_V dV u_{em} = \int_0^w dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dss \left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) =$$

$$2\pi w \int_0^a dss \left(\frac{I^2 t^2}{a^4\pi^2\epsilon_0} + \frac{\mu_0 I^2 s^2}{4\pi^2 a^4}\right) = w\left(\frac{I^2t^2}{2a^2\pi\epsilon_0} + \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}\right)$$

Die zeitliche Änderung des Energieinhaltes ist damit:

$$\dot{W} = \frac{I^2 t}{a^2\pi\epsilon_0}$$

und die vom Poynting-Vektor transportierte Leistung über den Zylinderoberfläche mit Radius a und Länge w ist:

$$\oint_{\partial Zyl} \vec{S} \cdot d\vec{a} = \int_0^w dz \int_0^{2\pi} d\phi a S \hat{e}_s \cdot \hat{e}_s = -\frac{I^2 t w}{a^2\pi\epsilon_0}$$

Das Minuszeichen signalisiert, dass die Energie in das Volumen fließt. Außerdem entspricht die Energiezunahme genau $\dot{W}$ genau der Leistung durch den Poynting-Vektor. Das stimmt auch mit der Gleichung aus der Vorlesung überein:

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(u_{mech} + u_{em}\right) dV = -\frac{1}{\mu_0}\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

6 Lösung

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_j = \sum_i \partial_{x_i} T_{ij} = \epsilon_0 \sum_i \left(\partial_{x_i}\left(E_i E_j\right) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{x_i}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\sum_i \left(\partial_{B_i}\left(E_i B_j\right) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{x_i}B^2\right) =$$

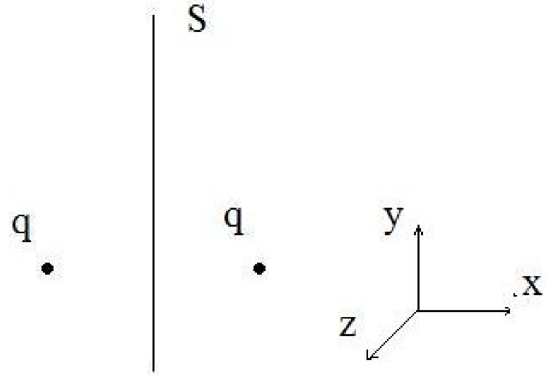
$$= \sum_i \left(\left(\partial_{x_i}E_i\right)E_j + E_i\left(\partial_{x_i}E_j\right)\right) - \epsilon_0\frac{1}{2}\partial_{x_j}E^2 + \frac{1}{\mu_0}\sum_i \left(\left(\partial_{x_i}B_i\right)B_j + B_i\left(\partial_{x_i}B_j\right)\right) - \frac{1}{2\mu_0}\partial_{x_j}B^2 =$$

$$= \epsilon_0\left[\left(\nabla \cdot \vec{E}\right)E_j + \left(\vec{E} \cdot \nabla\right)E_j - \frac{1}{2}\partial_{x_j}E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[\left(\nabla \cdot \vec{B}\right)B_j + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)B_j - \frac{1}{2}\partial_{x_j}B^2\right]$$

7 Lösung

a) Wir wollen bei dieser Aufgabe folgende Formel aus der Vorlesung verwenden:

$$\vec{F} = \oint_S \mathbf{T} \cdot d\vec{a} - \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_V \vec{S} dV$$



Angenehmerweise können wir den hinteren Teil vergessen, da es sich um ein statischen Problem handelt und die Zeitableitung demnach verschwindet. Mit dieser Gleichung lässt sich die Kraft auf die Ladungen im Volumen V berechnen. Wir bestimmen zunächst die Kraft auf die linke Ladung. Dazu wählen wir als Intergationsvolumen einen Quader, dessen eine Seitenfläche im die Symmetrieebene S ist. Die anderen Seiten schieben wir ins Unendliche, dadurch verschwinden diese Beiträge, da die Felder abfallen. Somit brauchen wir nur S zu betrachten. Bei der Wahl des Koordinatensystems fällt S genau mit der y-z-Ebene zusammen.

Zuerst müssen wir den Spannungstensor aufstellen, dazu benötigen wir die elektrischen Felder. (Da die Punktladungen in Ruhe sind, gibt es keine magnetischen.) Das Feld der linken Ladung am Punkt $\vec{r}$ ist:

$$\vec{E_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} + a\hat{e}_x}{|\vec{r} + a\hat{e}_x|^3}$$

Analog gilt für die rechte Ladung:

$$\vec{E_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - a\hat{e}_x}{|\vec{r} - a\hat{e}_x|^3}$$

Wenn man das Gesamtfeld in der y-z-Ebene (x=0) auswertet, erhält man:

$$\vec{E}_{ges}^{x=0} = \vec{E_1}^{x=0} + \vec{E_2}^{x=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2y\hat{e}_y + 2z\hat{e}_z}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}^3}$$

Da für die Integration über die y-z-Ebene der infinitesimale Flächennormalenvektor $d\vec{a} = dxdy\hat{e}_x$ ist, wird nur die erste Zeile von $\mathbf{T}$ benötigt. Beachte, dass der Normalenvektor aus dem geschlossenen Volumen herauszeigen muss! Dann erhält man:

$$T_{xx} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 \right) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{y^2 + z^2}{(a^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$T_{xy} = \epsilon_0 E_x E_y = 0 \;\text{ und } T_{xz} = \epsilon_0 E_x E_z = 0$$

Jetzt können wir das Integral auswerten:

$$\vec{F} = \int_S \mathbf{T} d\vec{a} = \int_S \mathbf{T} dxdy\hat{e}_x = \int_S \left(T_{xx}\hat{e_x} + T_{xy}\hat{e}_y + T_{xz}\hat{e}_z \right) dxdy$$

Die letzten beiden Terme sind null. Damit hat die Kraft nur eine x-Komponente. Das Integral vereinfacht sich, wenn wir in zweidimensionale Polarkoordinaten übergehen:$r^2 = y^2 + z^2$ und $dxdy = rdrd\phi$. Eingesetzt liefert das:

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr \frac{r^3}{\left(a^2+r^2\right)^3}\hat{e}_x = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4a^2}\hat{e}_x$$

Dabei haben wir in der letzten Rechnung den Hinweis verwendet.

Wie erwartet ist das genau die Coulomb-Kraft zweier Teilchen mit Ladung q und Abstand $2a$. Wegen der Abstoßung wirkt die Kraft auf das linke Teilchen nach links. Hätten wir das rechte Teilchen betrachtet, hätten wir den Flächennormalenvektor umdrehen müssen, damit er nach außen zeigt, also: $\hat{e_x} \to -\hat{e}_x$ und die Kraft würde nach rechts weisen.

b) Diesen Aufgabenteil behandeln wir mit der gleichen Lösungsstrategie. Wir ersetzen die linke Ladung durch $-q$. Dann wird aus ihrem Feld:

$$\vec{E_1} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}+a\hat{e}_x}{\left|\vec{r}+a\hat{e}_x\right|^3}$$

Das Feld der rechten Ladung bleibt erhalten. Somit finden wir als Gesamtfeld in der y-z-Ebenen:

$$\vec{E}_{ges}^{x=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a\hat{e}_x}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3}$$

Das einzige nicht-triviale Element des Spannungstensors ist:

$$T_{xx} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{4a^2}{\left(a^2+y^2+z^2\right)^3}$$

Die Kraft kann also nur eine Komponente in x-Richtung besitzen, wie wir es erwarten. Die Integration liefert schließlich wieder mit Polarkoordinaten:

$$F_x = \int_S T_{xx}dxdy = \frac{q^2}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\infty} dr\frac{r}{\left(a^2+r^2\right)^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^4}\int_0^{\infty} dr\frac{r^2}{\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right)^3}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a}\right)\frac{r}{a\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right)^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\frac{-\frac{1}{4}}{(u^2+1)}\Big|_0^{\infty} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4a^2}$$

Wieder ist die ausgerechnete Kraft die Coulomb-Kraft. Sie wirkt dieses Mal allerdings nach rechts, da sie anziehend ist.

8 Lösung

a) Aus der VL wissen wir, dass:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{e}_r$$

weiterhin gilt:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$$

Da das Vektorpotential nur eine Radialkomponente besitzt, kann es keine Rotation haben.

b) Die umgeeichten Potentiale lauten:

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda = 0$$

Es handelt sich also bei beiden Potentialdarstellungen um eine Punktladung, die am Ursprung sitzt.

9 Lösung

Gegeben seien die Potentiale V und $\vec{A}$, wobei $\nabla\cdot\vec{A}$ eine beliebige, glatte Funktion sein soll. Dann können wir, mit einer Eichfunktion λ neue Potentiale V' und $\vec{A}'$ finden, die die gleichen Felder erzeugen. Für λ muss dabei gelten:

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

Wir stellen aber noch die zusätzliche Bedingung, dass $\vec{A}'$ in der Lorentz-Eichung vorliegt, dass heißt: $\nabla \cdot \vec{A}' = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$. Zusammen mit den obigen Gleichungen bedeutet dies:

$$\nabla \cdot \vec{A}' = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^2\lambda = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{A}$$

Dies entspricht der Poisson-Gleichung:$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Sie hat die elektrostatischen Lösungen:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Analog wählen wir hier als Lösungen:

$$\lambda = \int dV' \frac{\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}', t) + \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Wenn man den Laplace-Operator auf diese Gleichung anwendet, so wirkt die Differentiation (bezügl. $\vec{r}$) unter dem Integral nur auf den Nenner und produziert eine Deltadistribution, die eine Auswertung des Integrals bei $\vec{r}$ erzwingt. Also erfüllt λ Bedingungsgleichung.

10 Lösung

Da der Draht elektrisch neutral ist (Es fließt nur ein Strom. Es wurden keine Ladungen aufgebracht.), ist die Ladungsdichte null und dementsprechend auch $V = 0$ im gesamten Raum.

Für $\vec{A}$ benutzen wir die Formel für die retardierten Potentiale:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

wobei $t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ Zunächst betrachten wir den inneren Kreisring:

$$\vec{A}_a(0,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{kl. Kr. Kreisring}} \frac{I(t_r)}{|0-\vec{r}'|}(-\hat{e}_\phi)\,dl$$

Dabei haben wir als vektoriellen Anteil den negativen Einheitsvektor in ϕ-Richtung verwendet. Weiterhin können wir verwenden, dass $t_r = t - \frac{a}{c}$ und $dl = ad\phi$ ist. Eingesetzt erhalten wir schließlich:

$$\vec{A}_a(0,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\pi \frac{k\left(t-\frac{a}{c}\right)}{a}\begin{pmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\end{pmatrix}ad\phi = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\left(t-\frac{a}{c}\right)\hat{e}_x$$

Dabei wird aus $|\vec{r}'|$ auf dem Kreis einfach a. Die Berechnung auf dem äußeren Kreisring erfolgt genauso, nur dass jetzt in positiver $\hat{e}_\phi$-Richtung integriert wird und a durch b zu ersetzen ist. Für dieses Stück lautet das Ergebnis dann:

$$\vec{A}_b(0,t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\left(\frac{b}{c}-t\right)\hat{e}_x$$

Die beiden geraden Teilstücke addieren sich am Ursprung genau auf. Am linken Teilstück haben wir:

$$\vec{A}_{links}(0,t) = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int_{-b}^{-a}\frac{t-\frac{|x'|}{c}}{|x'|}\hat{e}_x = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int_{-b}^{-a}\frac{t+\frac{x'}{c}}{-x'}\hat{e}_x = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int_a^b\frac{t-\frac{x'}{c}}{x'}\hat{e}_x = \vec{A}_{rechts}(0,t)$$

Im letzten Schritt haben wir eine Substitution $x' \to -x'$ durchgeführt. Dann wird aus $dx' \to -dx'$, $-a \to a$ und $-b \to b$. Das zusätzliche Minuszeichen durch das Differential nutzen wir um die Integralgrenzen umzudrehen. Damit finden wir für den Anteil der beiden geraden Ströme:

$$\vec{A}_{ger} = 2\frac{\mu_0 k}{4\pi}\int_a^b\frac{t-\frac{x'}{c}}{x'}\hat{e}_x = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{a-b}{c}\right)\hat{e}_x$$

Damit erhalten wir für das gesamte Vektorpotential am Ursprung durch Addition:

$$\vec{A}_{ges}(0,t) = \frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Für das elektrische Feld finden wir:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Das magnetische Feld können wir nicht berechnen, da die Rotation eine Ortsableitung darstellt und wir $\vec{A}$ nur an einem einzigen Punkt ausgerechnet haben.

11 Lösung

Wir legen den Ringmittelpunkt in den Ursprung und den Ring selbst in die x-y-Ebene.

Der Ring rotiert in einem Zeitintervall Δt um den Winkel $\Delta\phi = \omega t$. Wenn wir einen festen Winkel ϕ betrachten, so ist die momentane Linieladungsdichte dort, wenn wir zum Zeitpunkt $t = 0$ gestartet sind.:

$$\lambda_\phi(t) = \lambda_0 \left| \sin \frac{\phi - \omega t}{2} \right|$$

Damit können wir das skalare Potential bestimmen:

$$V(0,t) = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0} \oint_{\text{Ring}} dl' \frac{\lambda_{\phi'}(t_r)}{|0 - \vec{r}'|}$$

Nun können wir verwenden: $dl' = a d\phi'$, $|0 - \vec{r}'| = a$ und $t_r = t - \frac{a}{c}$. Damit erhalten wir:

$$V(0,t) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \left| \sin \frac{\phi' - \omega t_r}{2} \right| = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \left| \sin \frac{\phi'}{2} \right| = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Periodizität der Sinusfunktion ausgenutzt. Das Integral ändert sich nicht, solange wir über eine volle Periode integrieren, egal wo der Anfangspunkt liegt. Der Faktor 4 kommt bei Aufspalten des Betrages und beim Ausintegrieren heraus.

Jetzt müssen wir noch das Vektorpotential berechnen. Dazu stellen wir zunächst die Strom $\vec{I}$ auf:

$$\vec{I} = \lambda_\phi(t)\,\vec{v} = \lambda_\phi(t)\,\omega a \hat{e}_\phi = \lambda_0 \left| \sin \frac{\phi - \omega t}{2} \right| \omega a \hat{e}_\phi$$

Damit können wir in die Formel für das retardierte Potential gehen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

was sich aber hier vereinfacht zu:

$$\vec{A}(0,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Ring}} \frac{\vec{I}(\vec{r}', t_r)}{|0 - \vec{r}'|} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} \lambda_0 a \omega \int_0^{2\pi} a d\phi' \frac{\left| \sin \frac{\phi' - \omega t_r}{2} \right|}{a} =$$

$$= \frac{\mu_0 \lambda_0 a \omega}{4\pi} \int_{0 - \frac{\omega t_r}{2}}^{2\pi - \frac{\omega t_r}{2}} d\phi \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| \begin{pmatrix} -\sin\left(\phi + \frac{\omega t_r}{2}\right) \\ \cos\left(\phi + \frac{\omega t_r}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\mu_0 \lambda_0 a \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| \begin{pmatrix} -\sin\phi \cos\left(\frac{\omega t_r}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega t_r}{2}\right)\cos\phi \\ \cos\phi \cos\left(\phi + \frac{\omega t_r}{2}\right) - \sin\phi \sin\left(\frac{\omega t_r}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Dabei ist wieder die Periodizität des Integranden ausgenutzt worden, sowie die Additionstheoreme aus der Angabe. Nun können wir die Betragsstriche weglassen, da:

$$\sin \frac{\phi}{2} \geq 0 \quad \forall \phi \in [0, 2\pi]$$

Dann treten nur zwei Integrale auf, die wir gesondert betrachten:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin\frac{\phi}{2}\sin\phi = 2\int_0^{2\pi} d\phi \sin^2\frac{\phi}{2}\cos\phi\frac{\phi}{2} = \frac{4}{3}\sin^3\frac{\phi}{2}\,|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin\frac{\phi}{2}\cos\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \sin\frac{\phi}{2}\left(2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1\right) = \left(-\frac{4}{3}\cos^3\frac{\phi}{2} + 2\cos\frac{\phi}{2}\right)|_0^{2\pi} = -\frac{4}{3\pi}$$

Setzt man noch alles ein erhält man für das Vektorpotential in der Ringmitte:

$$\vec{A}\,(0,t) = \frac{\mu_0\lambda_0 a\omega}{3\pi}\left(\sin\left(\omega\left(t - \frac{a}{c}\right)\right)\hat{e}_x - \cos\left(\omega\left(t - \frac{a}{c}\right)\right)\hat{e}_y\right)$$

wobei wieder die retardierte Zeit $t_r = t - \frac{a}{c}$ eingesetzt wurde.