Ferienkurs Elektrodynamik 2010

Übungsaufgaben für Dienstag, den 16. März

Carl Hippler

1 Multiple Choice

1. Das elektrische Dipolmoment einer Ladungskonfiguration ist

   - □ von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.
   - □ von der Wahl des Koordinatensystems abhängig, wenn die Gesamtladung ungleich null ist.
   - □ immer von der Wahl des Koordinatensystems abhängig.

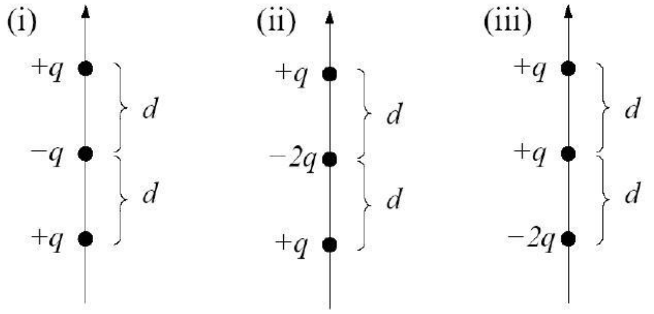
2. Eine Punktladung q befinde sich am Ort $\vec{r} \neq \vec{0}$. Dann gilt für ihr Dipolmoment:

   - □ Es ist gleich $\vec{0}$.
   - □ Es ist gleich $q \cdot \vec{r}$.

3. Ein positiv geladenes Teilchen befindet sich in einem homogenen elektrischen und homogenen magnetischen Feld. Beide Feldrichtungen sind parallel. Weitere Felder sind nicht vorhanden. Das Teilchen wird zunächst festgehalten und dann plötzlich losgelassen. Das Teilchen bewegt sich

   - □ auf einer Kreisbahn.
   - □ auf einer Parabel.
   - □ auf einer Geraden.
   - □ auf einer Zykloide.

4. Betrachte folgende Anordnungen ruhender Ladungen im Vakuum. Es befinde sich immer die mittlere Punktladung im Koordinatenursprung. Gib für jede Anordnung die führenden Potenzen von $r = |\vec{r}|$ an, mit denen das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ bei großem r abfällt.



(i) □ $\frac{1}{r}$ □ $\frac{1}{r^2}$ □ $\frac{1}{r^3}$

(ii) □ $\frac{1}{r}$ □ $\frac{1}{r^2}$ □ $\frac{1}{r^3}$

(ii) □ $\frac{1}{r}$ □ $\frac{1}{r^2}$ □ $\frac{1}{r^3}$

5. Was für allgemeine Stetigkeitsbedingungen gelten an der Grenzfläche zwischen zwei Medien? Richtige Antworten ankreuzen!

   □ Die Normalkomponente von $\vec{B}$ ist stetig.

   □ Die Tangentialkomponente von $\vec{B}$ ist stetig.

   □ Die Normalkomponente von $\vec{H}$ ist stetig, falls keine freien Oberflächenströme an der Grenzfläche fließen.

   □ Die Tangentialkomponente von $\vec{H}$ ist stetig, falls keine freien Oberflächenströme an der Grenzfläche fließen.

2 Multipolmomente

Berechne das Monopolmoment Q, das Dipolmoment $\vec{p}$ und den spurlosen Quadrupoltensor Q_{ij} in kartesischer Darstellung der folgenden Ladungsanordnungen:

1. Auf der x-Achse befinden sich zwei Punktladungen $q > 0$ bei $x = +a$ bzw. $x = -a$, und auf der y-Achse befinden sich zwei Punktladungen $-q$ bei $y = +a$ und $y = -a$.

2. Eine Punktladung $q > 0$ befinde sich bei $\vec{r} = \vec{0}$. Die Ladung $-q$ sei gleichmäßig auf einer Kreisfläche mit Radius a und Zentrum im Ursprung in der x-y-Ebene verteilt.

3 Dipolfelder

1. Weise das Ergebnis aus der Vorlesung für das elektrische Feld $\vec{E}_{\mathrm{dip}}$ eines Dipols nach. Das elektrische Potenzial eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p}$ ist gegeben durch

$$\Phi_{\mathrm{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \circ \vec{r}}{r^3} \; .$$

   Verwende Identitäten aus der Vektoranalysis.

2. Berechne nun ebenso das magnetische Feld $\vec{B}_{\mathrm{dip}}$ eines magnetischen Dipolmoments mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{\mu}$. Das Vektorpotenzial des Dipols ist gegeben durch

$$\vec{A}_{\mathrm{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} \; .$$

   Auch hier sind wieder Identitäten aus der Vektoranalysis sehr hilfreich.

4 Wechselwirkung zweier elektrischer Dipole

Es ist zu zeigen, dass die potenzielle Energie eines elektrischen Dipols $\vec{p}_1$ im Feld eines anderen elektrischen $\vec{p}_2$ gegeben ist durch

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2}{r_{12}^3} - 3\, \frac{(\vec{r}_{12} \circ \vec{p}_1)(\vec{r}_{12} \circ \vec{p}_2)}{r_{12}^5} \right) \; .$$

Beide Dipole sollen als perfekte Dipole angesehen werden.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass sich die potenzielle Energie eines elektrischen Dipols $\vec{p}$ in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ ergibt zu

$$W = -\vec{p} \circ \vec{E} \; .$$

5 Amperèsches Durchflutungsgesetz

Für die fogenden Rechnungen soll das Amperèsche Durchflutungsgesetz verwendet werden:

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{r} = I_S \; ,$$

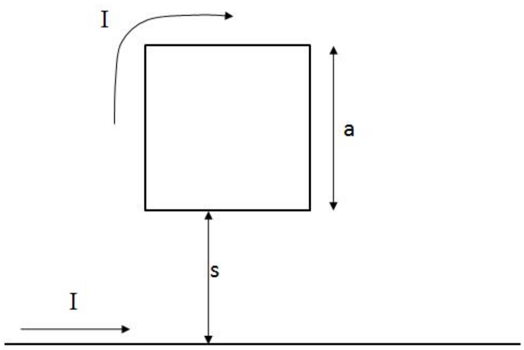
wobei I_S den durch die Fläche S fließenden, freien elektrischen Strom darstellt.

1. Berechne das Magnetfeld $\vec{B}$ innerhalb einer langen Spule mit $n = N/L$ Windungen pro Längeneinheit. (Der Begriff *lange Spule* bedeutet, dass der Durchmesser der Spule klein gegenüber ihrer Länge ist.)

   Hinweis: Bei einer langen Spule ist das Magnetfeld außerhalb der Spule vernachlässigbar klein. Das Magnetfeld im Innern der Spule ist praktisch homogen und parallel zur Spulenachse gerichtet.

2. Ein Koaxialkabel besteht aus zwei sehr langen Hohlzylindern, zwischen denen sich ein isolierendes Material mit der magnetischen Suszeptibilität χ_{m} befindet. Über den inneren Hohlzylinder fließt der Strom I, welcher über den äußeren Hohlzylinder wieder zurückkehrt. Wie lautet das Magnetfeld zwischen den Hohlzylindern und außerhalb des Koaxialkabels?

6 Kraft auf eine Leiterschleife



Eine quadratische Leiterschleife (siehe Abbildung) mit der Seitenlänge a und ein unendlich langer, gerader Draht liegen in einer Ebene. Der Abstand zwischen der Schleife und dem Draht sei s. Sowohl der Draht als auch die Leiterschleife werden von einem Strom der Stärke I durchflossen. Welche Kraft wirkt auf die quadratische Leiterschleife?

7 Biot-Savart-Gesetz

Berechne mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

das Magnetfeld einer kreisförmigen, stromdurchflossenen Leiterschleife in einem Punkt $\vec{r} = z\,\vec{e}_z$ über dem Mittelpunkt der Schleife.

8 Magnetischer Dipol

Ein magnetischer Dipol $\vec{\mu} = -\mu\,\vec{e}_z$ sei im Koordinatenursrung lokalisiert und befinde sich in einem ansonsten homogenen magnetischen Feld $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$.

1. Zeige, dass es eine Kugel gibt, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und durch die keine magnetischen Feldlinien des resultierenden Gesamtfeldes $\vec{B}_{\text{ges}} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{dip}}$ ein- und austreten. Finde den Radius dieser Kugel.

2. Skizziere den Verlauf der Feldlinien innerhalb sowie außerhalb der Kugel.

9 Rotierende Hohlkugel

Eine Kugelschale vom Radius R trage die Ladung Q, die homogen auf der gesamten Oberfläche verteilt sei, und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$.

1. Wie lautet die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r})$?

2. Berechne das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ der Hohlkugel, welches gegeben ist durch
$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r \ .$$