Ferienkurs Elektrodynamik

Musterlösung Elektrostatik

15.03.10

1 Multiple Choice

- **Frage 1**

X Wie das einer Punktladung Q.
☐ Ziemlich kompliziert...
☐ Wie das einer geladenen Schale, die wie die Höhle geformt ist.

Warum? Die Punktladung induziert eine Ladung auf der Oberfläche der Höhle, die so verteilt ist, dass im restlichen Innern der Kugel kein E-Feld herrscht. Die Oberflächenladung ist insgesamt genau -Q, weshalb sich wiederum +Q im Rest (auf der Oberfläche) der Kugel verteilen können. Dies ist nun die gleiche Situation wie bei einer normalen geladenen Kugel mit Ladung +Q.

- **Frage 2**

X $\vec{E}$ ☐ $\vec{D}$ ☐ Φ

$\vec{D}$ ist nur bei linearen Dieelektrika ein Gradientenfeld. Φ ist die Gradientfunktion, nicht das Gradientenfeld.

- **Frage 3**

☐ $1/r^3$ X $1/r$ ☐ $const$

Eine ebene Platte hat ein konstanten E-Feld. Ein Draht liegt dimensionsmäßig genau zwischen Punktladung und geladener Platte, also $1/r$.

- **Frage 4**

☐ Nichts. X Die Kugel wird angezogen. ☐ Die Kugel wird abgestoßen.

Die Induktionsladung ist so, dass die Kugel angezogen wird (Ungleichnamige Ladungen auf der Innenseite, gleichnamige auf der Aussenseite).

- **Frage 5**

X Nichts. ☐ Die Kugel wird zur negativ geladenen Seite gezogen.
☐ Die Kugel wird zur positiv geladenen Seite gezogen.

Es bilden sich zwar Influenzladungen entsprechend dem E-Feld, die werden aber mit der gleichen Kraft zu ihrer jeweiligen Platte gezogen, weil das Feld überall konstant ist. Netto passiert also nichts.

- **Frage 6**

☐ Homogen über das gesamte Volumen. ☐ Abhängig vom Radius. X Auf der Oberfläche der Kugel.

Innerhalb des Leiters ist $\vec{E} = 0$ (quasi per Definition). Wegen $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ muss also ρ auch gleich Null sein. Es bleibt nur die Oberfläche, wo die Divergenz nicht Null ist, weil hier die E-Feld Linien ausserhalb der Kugel „beginnen".

2 Spiegelladungen - ebene Platte

a) Die Spiegelladung ist natürlich genau gegenüber der Ladung, d.h. am Punkt $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ und hat die Ladung $-q$, wenn die ursprüngliche Ladung q am Ort $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ sitzt. Das E-Feld vor der Platte ergibt sich dann als Summe:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{r}}{\left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{r} \right|^3} - \frac{\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{r}}{\left| \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{r} \right|^3} \right)$$

Für die Oberflächenladung braucht man das E-Feld entlang der y-Achse.

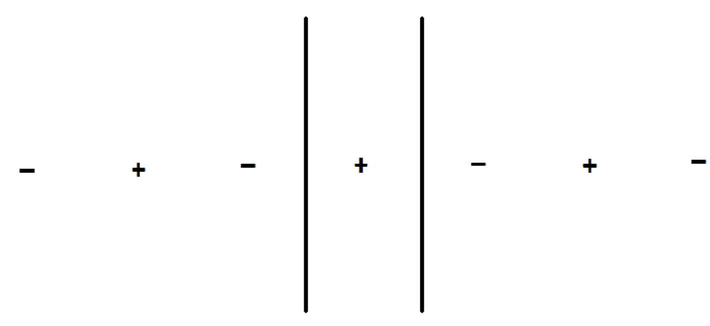
$$\vec{E}(x=0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\begin{pmatrix} a \\ -y \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} a \\ -y \end{pmatrix}\right|^3} - \frac{\begin{pmatrix} -a \\ -y \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -a \\ -y \end{pmatrix}\right|^3}\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

Die Oberflächenladung ist also

$$\sigma(y) = |E_\perp| \cdot \epsilon_0 = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

b) Vor der Platte erzeugt die Oberflächenladung den „Eindruck", hinter der Platte säße eine Punktladung $-q$. Wenn man sich auf der anderen Seite der Platte befindet ändert sich an diesem Eindruck nichts (die Platte ist ja unendlich dünn, d.h. hier ist die Oberflächenladung genauso). In dem Fall erzeugt sie das Bild genau am Ort der anderen realen Ladung. Das Feld zweier ungleichnamiger Ladungen, die am gleichen Ort sitzen, ist natürlich Null. Daher ist hinter der Platte gar kein Feld.

c) Um das Potential entlang der Platte 1 auf Null zu setzen, muss man die reale Ladung schonmal an dieser spiegeln. Um nun das Potential entlang der Platte 2 auf Null zu setzen, muss man erstens die reale Ladung an dieser Platte spiegeln, zweitens die erste Spiegelladung, damit die gesamte Konstruktion symmetrisch um die Platte 2 ist. Nun ist die Symmetrie bezüglich der Platte 1 aber wieder verloren gegangen - also wieder alle neuen Spiegelladungen an Platte 1 spiegeln. Nun wieder an Platte 2, wieder an Platte 1, und ewig so weiter. Dies ergibt eine unendliche Reihe von Spiegelladungen.



3 Spiegelladungen - Kugel

a) Dem Ansatz entsprechend sitze eine Spiegelladung auf der Verbindungsgerade des Mittelpunkt mit der realen Ladung, und zwar im Abstand b vom Mittelpunkt, mit Ladung Q. Der Ursprung sei im Mittelpunkt der Kurve, die x-Achse liege auf der Verbingungsgeraden. Das Potential ist dann

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r_q}|} + \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r_Q}|}\right)$$

Nun ist die Randbedingung, dass $\Phi = 0$ für $R = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{q}{|\vec{R}-\vec{r_q}|} &= -\frac{Q}{|\vec{R}-\vec{r_Q}|} \\
\frac{q}{\sqrt{a^2+R^2-2aRcos(\theta)}} &= -\frac{Q}{\sqrt{b^2+R^2-2bRcos(\theta)}} \\
\frac{a^2+R^2-2aRcos(\theta)}{q^2} &= \frac{b^2+R^2-2bRcos(\theta)}{Q^2}
\end{aligned}$$

Der Kosinus kommt durch den Kosinussatz rein (oder Vektormultiplikation, wie man will), weil $\vec{R}$ ja irgendein Vektor auf der Kugeloberfläche ist. Die ϕ-Koordinate ist hier egal, weil man sich ja immer so drehen kann, dass $\vec{R}$ und die Verbindungsgerade der Ladungen in der gleichen Ebene liegen!
Jetzt ist das Argument, dass es ja auf der ganzen Kugel gilt, deswegen muss obiger Ausdruck unabhängig von θ sein! Also gilt

$$\begin{aligned}
\frac{2aRcos(\theta)}{q^2} &= \frac{2bRcos(\theta)}{Q^2} \\
b &= a\frac{Q^2}{q^2}
\end{aligned}$$

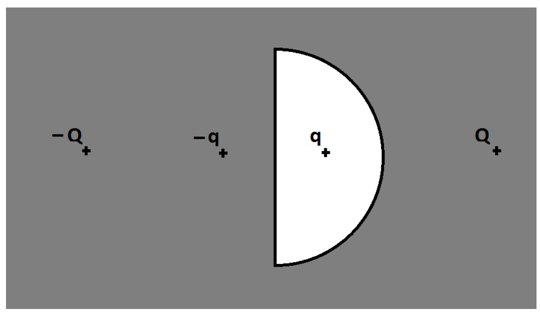
Einsetzen in die Gleichung davor...

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q^2}(a^2+R^2) &= \frac{1}{Q^2}\left(a^2\frac{Q^4}{q^4}+R^2\right) \\
Q^4\cdot\frac{a^2}{q^4} - Q^2\cdot\frac{1}{q^2}(a^2+R^2)+R^2 &= 0 \\
Q^2_{1/2} &= \frac{q^2}{2a^2}(a^2+R^2+\pm(a^2-R^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Q_1 &= \pm q, b_1 = a \\
\Rightarrow Q_2 &= \pm q\frac{R}{a}, b_2 = R^2/a
\end{aligned}$$

Die zweite Lösung (mit negativem Vorzeichen für Q) ist die gesuchte, die erste würde lediglich die reale Ladung eliminieren, was $\Phi = 0$ im gesamten Raum bedeutet.

b) Dies ist letztendlich eine Überlagerung aus zwei System, die nun bekannt sind: Spiegelladung bei einer ebenen Platte, und Spiegelladunge bei einer Kugel. Um das Potential entlang der Kugelschale auf Null zu setzen, muss entsprechend der Teilaufgabe a) eine Spiegelladung außerhalb der Kugel platziert werden.
Um die Symmetrie bezüglich der Schnittebene herzustellen, müssen nun die reale Ladung und die *Kugel*spiegelladung noch über diese Ebene gespiegelt werden. Entlang der Ebene ist nun $\Phi = 0$.
Entlang der Kugelschale gilt auch immer noch $\Phi = 0$, weil die beiden neuen Spiegelladungen sich zueinander ja auch so verhalten, dass sie auf der gleichen Kugel das Potential auf Null setzen.



4 Zylinderkondensator

a) Auf einem Abschnitt der Länge h sitzt die Ladung $\lambda \cdot h$.
Nun nimmt man einfach das Gaussche Gesetz und integriert über eine Gauss'sche Oberfläche in Form eines Zylinders mit Radius „r" und Höhe h.

$$\int_{Zyl} \nabla \cdot \vec{E} d^3 r = \oint_{\partial Zyl} \vec{E} d\vec{a} = E_r 2\pi r h$$
$$= \lambda h \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Man kann noch $\sigma := Q/l$ als „Linienladung" definieren, muss man aber nicht.

b) Das Potential obigen E-Feldes ist

$$\Phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln(r)$$

Die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Zylindern ist also.

$$\Delta\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Die Ladung des Zylinderkondensators ist $\lambda \cdot L$, die Kapazität ergibt sich also als

$$C = \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

5 Plattenkondesator mit Dielektrika

a) Falls man nicht im Vakuum ist, heißt das Gauss'sche Gesetz

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Um $\vec{D}$ auszurechnen geht man also erstmal wie gehabt vor, d.h. man integriere über eine kleine Gauss'sche Box , die gerade noch die Oberfläche der einen Platte einschließt.

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{D} &= \oint_{\partial V} \vec{D}\vec{da} = D \cdot da \\ &= \sigma \cdot da \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = \sigma$$

b) Es gilt ja $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_R\vec{E}$. Also ist

$$\vec{E} = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r}\hat{e_x} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}\hat{e_x} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_1}\hat{e_x} & x < \frac{1}{3}d \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_2}\hat{e_x} & x > \frac{1}{3}d \end{cases}$$

c) Die Polarisation ist gegeben als

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}$$

mit $1 + \chi_e = \epsilon_r$. Daher ist

$$\vec{P_{1/2}} = \epsilon_0(\epsilon_{1/2} - 1) \cdot \vec{E}$$

d) Damit ist das Potential

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_1} \cdot x & x < \frac{1}{3}d \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_1} \cdot \frac{d}{3} - \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_2} \cdot \left(x - \frac{d}{3}\right) & x > \frac{1}{3}d \end{cases}$$

Ganz wichtig ist hier der Summand, der die beiden Potentialabschnitte „verbindet“. Ohne dem wäre zwar auch die Gleichung $\nabla\Phi = -\vec{E}$ erfüllt, aber das Potential wäre nicht stetig, und damit nicht harmonisch, es wäre also die Laplace-Gleichung $\nabla^2\Phi = 0$ nicht erfüllt.
Damit ist die Potentialdifferenz

$$\Delta\Phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_1}\cdot\frac{d}{3} + \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_2}\cdot\frac{2d}{3} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 3}\left(\epsilon_1^{-1} + 2\epsilon_2^{-1}\right)$$

Die Kapazität ergibt sich also als

$$C = \frac{\sigma}{\Delta\Phi} = \frac{3\epsilon_0}{d}\frac{1}{\left(\epsilon_1^{-1} + 2\epsilon_2^{-1}\right)} = \frac{3\epsilon_0}{d}\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

e) Das Gesamtpotential

$$\Delta\Phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_1}\cdot\frac{d}{3} + \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_2}\cdot\frac{2d}{3}$$

ist offentsichtlich die Summe der Potentialdifferenzen der zwei Kondensatoren, die man hat, wenn man sich die Dielektrika noch durch eine weitere leitende Platte getrennt vorstellt. Jetzt ist ja $C = \frac{Q}{\Delta\Phi}$ oder auch $\Delta\Phi = Q/C$.
Also ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q}\Delta\Phi_{ges} &= \frac{1}{Q}(\Phi_1 + \Phi_2)\\ \frac{1}{C_{ges}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\end{aligned}$$

6 Trennung der Variablen - kartesische Koordinaten

a) Es gelten folgende Randbedingungen:

1. $\Phi = 0$ für $y = 0$
2. $\Phi = 0$ für $y = a$
3. $\Phi = \Phi_0(y)$ für $x = 0$
4. $\Phi \to 0$ für $x \to \infty$

b) Mit $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)$ wird die Laplace Gleichung zu

$$\begin{aligned}Y(y)\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X(x)\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= 0\\ \frac{1}{X}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= -\frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Weil die linke Seite nur von x abhängt und die rechte nur von y kann man sagen dass jede Seite für sich konstant sein muss.

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = C_x \qquad \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = C_y$$

$$mit \quad C_x + C_y = 0$$

Man definiere $C_x := k^2$ und $C_y = -k^2$. Damit ergeben sich die allgemeinen Lösungen.

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$
$$Y(y) = Csin(ky) + Dcos(ky)$$

c) Mit (1.) folgt $D = 0$. Mit (4.) folgt $A = 0$.
Bis dahin ist $\Phi(x, y) = Ce^{-kx} sin(ky)$. Damit folgt mit (3.):

$$sin(ka) = 0$$

Dies ist erfüllt für all $k = \frac{n\pi}{a}$, mit $n \in N$. Es gibt also unendlich Lösungen für die Laplace Gleichung? Nein, denn wir haben die 3. Randbedingung noch nicht beachtet. Bis jetzt müssen wir aber akzeptieren, dass die Laplace-Gleichung für jedes n erfüllt ist, insbesondere wenn man alle „Lösungen“ (für jedes k_n) aufaddiert. Es gilt nun also

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} sin(n\pi y/a)$$

d) Die 3.Randbedingung lautet nun

$$\Phi(0, y) = \Phi_0(y)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(n\pi y/a) = \Phi_0(y)$$

Jetzt wendet man Fouriers Trick aus der Angabe an, also beide Seiten mit $sin(n'\pi ya)$ multiplizieren und von 0 bis a integrieren.

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a sin(n'\pi ya) sin(n\pi y/a) dy = \int_0^a \Phi_0(y) sin(n'\pi y/a) dy$$

Jetzt gilt ja

$$\int_0^a sin(n'\pi ya) sin(n\pi ya) dy = \begin{cases} 0 & n' \neq n \\ a/2 & n' = n \end{cases}$$

also die Orthogonalität der Sinusfunktionen (lässt sich leicht über die Additionstheoreme nachweisen).
Also fallen bei der Summe alle Terme raus, ausser der, wo $n = n'$ gilt.

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a \Phi_0(y) sin(n\pi y/a)dy$$

Die C_n sind die Fourierkoeffizienten der Funktion $\Phi_0(y)$.

e) Nun sei $\Phi_0(y) = \Phi_0$, also konstant. Das Integral oben berechnet sich dann zu

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a \Phi_0 sin(n\pi y/a)dy = \frac{4\Phi_0}{n\pi} \qquad f\ddot{u}r\ n\ gerade, \quad sonst\ 0$$

Alle geradzahligen n verschwinden. Damit ist die Gesamtlösung

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,...} \frac{e^{-n\pi x/a}}{n} sin(n\pi y/a)$$

7 Trennung der Variablen - Kugelkoordinaten

a) In Kugelkoordinaten ist $\Phi_0(\vec{r}) = -E_0 r cos\theta$, es gelten also folgende Randbedingungen.

1. $\Phi = 0 \qquad r = R$
2. $\Phi \to -E_0 r cos\theta \qquad r >> R$

b) Die allgemeine Lösung ist, wie im Skript steht:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) Y_l^m$$

c) Nach Randbedingung (2.) ist der einzige winkelabhängige Faktor, der in der Lösung vorkommen darf $cos\theta$. Die einzige dafür in Frage kommende Kugelflächenfunktion ist daher

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta$$

Also ist $l = 1$. Die erste Randbedingung liefert damit

$$AR + \frac{B}{R^2} = 0$$
$$B = -AR^3$$

$$\Rightarrow R(r) = A\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)$$

Wieder wegen Randbedingung (2.) wird $A = -E_0 \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}}$ festgelegt. Die Lösung ist also

$$\Phi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) cos\theta$$

d) Man könnte jetzt das E-Feld mithilfe des Gradienten berechnen und daraus die Oberflächenladung. Viel einfacher ist in diesem Zusammenhang die Formel

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{r=R} \\ &= -\epsilon_0 E_0 \left(1 + 2\frac{R^3}{r^3} \right) cos\theta \Big|_{r=R} \\ &= 3\epsilon_0 E_0 cos\theta \end{aligned}$$