Ferienkurs Elektrodynamik

Übungsblatt Elektrostatik

15.03.10

1 Multiple Choice

- **Innerhalb einer leitenden Kugel befindet sich eine unförmige Höhle, in der sich eine Punktladung Q befindet. Wie sieht das Feld außerhalb der Kugel aus?**

  ☐ Wie das einer Punktladung Q.
  ☐ Ziemlich kompliziert...
  ☐ Wie das einer geladenen Schale, die wie die Höhle geformt ist.

- **Was ist ein Gradientenfeld?**

  ☐ $\vec{E}$ ☐ $\vec{D}$ ☐ Φ

- **Das E-Feld einer Punktladung fällt proportional zu $1/r^2$ ab. Mit welcher Potenz fällt das eines elektrisch geladenen Drahtes ab?**

  ☐ $1/r^3$ ☐ $1/r$ ☐ $const$

- **Eine leitende, ungeladene Kugel wird in die Nähe einer Punktladung gebracht. Was passiert?**

  ☐ Nichts. ☐ Die Kugel wird angezogen. ☐ Die Kugel wird abgestoßen.

- **Eine leitende, ungeladene Kugel wird zwischen die Platten eines unendlich ausgedehnten und geladenen Plattenkondensators gebracht. Was passiert?**

  ☐ Nichts. ☐ Die Kugel wird zur negativ geladenen Seite gezogen.
  ☐ Die Kugel wird zur positiv geladenen Seite gezogen.

- **Eine leitende Kugel besitze die Ladung Q. Wie genau verteilt sich Q in der Kugel?**

  ☐ Homogen über das gesamte Volumen. ☐ Abhängig vom Radius.
  ☐ Auf der Oberfläche der Kugel.

2 Spiegelladungen - ebene Platte

a) Eine Punktladungen q befindet sich im Abstand a vor einer geerdeten, unendlich dünnen und leitenden Platte. Wie ist das elektrische Feld vor der Platte? Wie ist die Oberflächenladung der Platte?

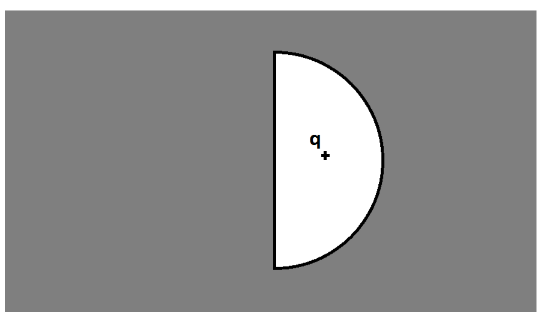
b) Wie ist das elektrische Feld hinter der Platte?

c) Eine Punktladung q befindet sich in der Mitte zwischen zwei planparallelen, geerdeten Platten. Welche Spiegelladungen muss man sich zusätzlich konstruieren, um auf das Feld, das zwischen den Platten herrscht, zurückschließen zu können? Keine Rechnung, nur Konstruktion.

3 Spiegelladungen - Kugel

a) Eine Punktladung q befindet sich im Abstand a vom Mittelpunkt einer leitenden, geerdeten Kugel mit Radius R. Wie ist das elektrische Potential?
Dabei ist im Inneren der Kugel eine Spiegelladung Q im Abstand b vom Mittelpunkt anzunehmen.

b) Im Inneren eines Leiters ist eine Höhle in Form einer Halbkugel mit Radius R. In der Halbkugel im Abstand d vom Boden befindet sich eine Punktladung q. Wie sind die Spiegelladungen zu verteilen, um die Laplace-Gleichung zu lösen?



4 Zylinderkondensator

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld eines unendlich langen Zylinders mit Radius R. Der Zylinder trage pro Längeneinheit die Ladung λ.

b) Wie groß ist die Kapazität eines Zylinderkondensators der Länge L zweier ineinander liegender Zylinder mit Radien R_1 und R_2 unter der Annahme das E-Feld sieht aus wie bei a)?

5 Plattenkondensator mit Dielektrika

Ein Plattenkondensator (Plattenabstand d) ist zu 1/3 gefüllt mit einem Dielektrikum mit der Dielektrezitätskonstante ϵ_1, zu 2/3 mit ϵ_2, und trage eine Oberflächenladungsdichte σ. Vernachlässigen Sie sämtliche Randeffekte.

a) Wie ist $\vec{D}$ innerhalb des Kondensators?

b) Wie ist $\vec{E}$ innerhalb des Kondensators?

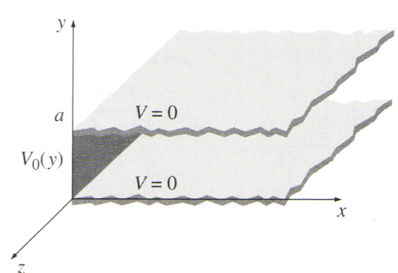
c) Wie ist die Polarisation $\vec{P}$ innerhalb des Kondensators?

d) Wie groß ist die Kapazität des Kondensators?

e) Leiten Sie daraus (oder allgemein) die Formel für die Gesamtkapazität einer Serienschaltung von Kondensatoren ab.

6 Trennung der Variablen - kartesische Koordinaten

Zwei geerdete Metallplatten liegen parallel zur x-z-Ebene im Abstand a parallel übereinander. Bei $x = 0$ sind die beiden Platten durch einen senkrechten Streifen miteinander verbunden, der ein y-abhängiges Potential $\Phi_0(y)$ trägt.



a) Welche Randbedingungen existieren für das Potential $\Phi(x, y, z)$ (4 Stück) ?

b) Stellen Sie die Laplace-Gleichung auf, machen sie den Ansatz $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)$ und vereinfachen Sie so weit, bis Sie zwei normale Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhalten.
Lösen Sie diese allgemein unter der Annahme, die Konstante der y-abhängigen DGL ist die negative Konstante.

c) Eliminieren Sie mithilfe der Randbedingungen nun so viele Integrationsvariablen wie möglich. Dabei wird es passieren, dass es für eine Konstante mehrere

Lösungen gibt, die eine Randbedingung erfüllen. Wie berücksichtigen Sie dies in der Lösung für $\Phi(x,y)$?

d) Wenn alles richtig ist, sollte das Potential bis jetzt irgendwie so aussehen:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} sin(n\pi ya)$$

Nun versuchen Sie mit der letzten Randbedingung ein Integral zu bestimmen, mit dem Sie die C_n rausfinden können. Dabei könnte *Fourier's Trick* nützlich sein: Mit $sin(n'\pi ya)$ multiplizieren und über eine halbe Periode integrieren.

e) Die Annahme ist nun, es handele sich um ein konstantes Potential, d.h. $\Phi_0(y) = \Phi_0$
Bestimmen Sie damit die C_n und die Lösung der Laplace-Gleichung für diesen Fall.

7 Trennung der Variablen - Kugelkoordinaten

Eine leitende, geerdete Kugel mit Radius R wird in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E_0\hat{e_z}$ platziert. Das Potential ohne der Kugel wäre also $\Phi_0(\vec{r}) = -E_0 z$

a) Schreiben Sie Φ_0 und die Randbedingungen (2 Stück) für das neue Potential Φ in Kugelkoordinaten.

b) Machen Sie jetzt den Separationsansatz $\Phi = R(r)Y(\theta,\phi)$ und lösen Sie die Laplace-Gleichung allgemein (steht im Skript).

c) Finden Sie nun die Lösung der Laplace-Gleichung für dieses spezielle System unter Beachtung der Randbedingungen.

d) Wie ist die Oberflächenladung auf der Kugel?