Ferienkurs Experimentalphysik 4
2010

Probeklausur - Musterlösung

1 Allgemeine Fragen

a) Welche Relation muss ein Operator erfüllen damit die dazugehörige Observable eine Erhaltungsgröße darstellt?

b) Was versteht man unter Luminosität und was ist ihre Einheit?

c) Was versteht man unter der Heisenbergschen Unschärferelation für Ort und Impuls?

d) Wie werden Bosonen und Fermionen definiert und was besagt das Pauli-Prinzip?

e) Erklären Sie die Quantenzahlen n, l, m. Welche Rolle spielen sie im Wasserstoffatom ohne Berücksichtigung von Korrekturen?

f) Was versteht man allgemein unter einem Satz von guten Quantenzahlen? Was sind die guten Quantenzahlen für ein einfaches, wasserstoffähnliches Atom ohne und mit Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung?

g) Sie haben bei der Führung am CERN nicht aufgepasst und Ihnen ist leider entgangen, ob an einem Streuexperiment identische Bosonen oder Fermionen aufeinander geschossen werden. Glücklicherweise sehen Sie ein Diagramm, welches die Detektorzählrate der elastischen Streuung in Abhängigkeit des Streuwinkels zeigt und finden dies raus. Wie?

h) Nennen Sie mindestens zwei Gründe, weshalb stationäre Zustände in der Quantenmechanik eine so wichtige Rolle spielen.

i) Was ist die Bedeutung der Wellenfunktion in der Quantenmechanik?

j) Wie lauten die Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge?

k) Wie lauten die Energie-Eigenwerte E_n des eindimensionalen harmonischen Oszillators im stationären Zustand?

l) Was versteht man unter entarteten Energieniveaus?

Sie sollten für die Beantwortung der Fragen nicht zu viel Zeit aufwenden. Kurze und prägnante Antworten reichen!

Lösung

a) Eine quantenmechanische Observable A ist eine Erhaltungsgröße wenn der dazugehörige Operator mit dem Hamiltonoperator kommutiert, also wenn $\left[\hat{H}, \hat{A}\right] = 0$ gilt.

b) Die Luminosität ist das Produkt aus der Teilchenstromdichte und der Anzahl der im Strahl stehenden Streuzentren. Sie hat also dieselbe Einheit wie die Teilchenstromdichte: $\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$.

c) Die Heisenbergsche Unschärferelation lautet

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

Sie besagt, dass Ort und Impuls nicht gleichzeitig exakt bestimmbar sind.

d) Bosonen sind Teilchen mit ganzzahligem Spin. Fermionen sind Teilchen mit halbzahligem Spin. Das Pauli-Prinzip besagt, dass die Fermionen-Vielteilchen-Zustandsfunktion unter Austausch zweier Teilchen antisymmetrisch sein muss.

e) Die Quantenzahl $n = 1, 2, \ldots$ ist die Hauptquantenzahl. Sie bestimmt die Energiezustände.
Die Quantenzahl $l = 0, 1, \ldots, n-1$ ist die Drehimpulsquantenzahl. Mit ihr lässt sich der Betrag des Drehimpulses über $|\boldsymbol{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ bestimmen.
Die Quantenzahl $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$ ist die magnetische Quantenzahl. Sie bestimmt die z-Komponente des Drehimpulses über $L_z = \hbar m$.

f) Gute Quantenzahlen sind immer mit Erhaltungsgrößen verbunden. Für wasserstoffähnliche Systeme ohne Spin-Bahn-Kopplung sind n, l, m_l und m_s gute Quantenzahlen. Berücksichtigt man die Spin-Bahn-Kopplung ist m_j an Stelle von m_l und m_s eine gute Quantenzahl da $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{s}$ um $\boldsymbol{j}$ präzedieren.

g) Für identische Teilchen ist die Wahrscheinlichkeit P ein Teilchen im Detektor nachzuweisen durch

$$P(\theta) = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2$$

gegeben. Das '+' gilt für Bosonen, das '−' gilt für Fermionen. Unter einem Streuwinkel von $\theta = 90°$ verschwindet für Fermionen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen in den Detektor gelangt. Ist die Detektorzählrate also unter diesem Winkel Null, so handelt es sich um Fermionen, ansonsten um Bosonen.

h) 1. Die stationären Zustände sind die Energie-Eigenzustände, d.h. die Zustände mit scharfer Energie. Sind sie bekannt, dann kann man aus der Wellenfunktion des Systems die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Energie-Messwerte berechnen.
2. Die stationären Zustände haben eine einfache Zeitentwicklung: Multiplikation mit dem Phasenfaktor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}$. Durch Entwicklung nach den stationären Zuständen kann man die zeitliche Entwicklung eines beliebigen Zustandes berechnen.

i) Die Wellenfunktion enthält alle Information über das betrachtete quantenmechanische System. Das Absolutquadrat der Ortswellenfunktion ergibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit(-sdichte) eines Teilchen.

j) Die Auswahlregeln lauten: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_{l,j} = 0, \pm 1$, $\Delta s = 0$, $\Delta m_s = 0$, $\Delta j = 0, \pm 1$ ($j = 0 \nrightarrow j = 0$).

k) Die Energie-Eigenwerte lauten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

l) Entartete Energieniveaus sind verschiedene Zustände mit gleicher Energie in quantenmechanischen Systemen.

2 Potentialmulde

Gegeben sei eine rechteckförmige Potentialmulde der Breite $b > 0$ und der Tiefe $-V_0$ mit $V_0 > 0$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ (Bereich I)} \\ -V_0 & 0 < x < b \text{ (Bereich II)} \\ 0 & x > b \text{ (Bereich III)} \end{cases}$$

Eine ebene Materiewelle (Energie $E > 0$, Masse m) treffe von links auf diese Potentialmulde. Der Betrag des Wellenvektors in den drei Bereichen soll mit k_{I}, k_{II} bzw. k_{III} bezeichnet werden.

a) Die Energie E des Teilchens sei nun fest vorgegeben. Berechnen Sie die Muldentiefe V_0 in Abhängigkeit der Energie E, so dass gilt: $k_{\mathrm{II}} = 4k_{\mathrm{I}}$.

b) Die Muldentiefe erfüllt nun die Bedingung aus a) (d.h. $k_{\mathrm{II}} = 4k_{\mathrm{I}}$). Geben Sie für alle drei Bereiche I, II und III die zugehörigen, resultierenden Ortswellenfunktionen $\phi_{\mathrm{I}}(x)$, $\phi_{\mathrm{II}}(x)$ und $\phi_{\mathrm{III}}(x)$ mit allgemeinen Amplitudenkoeffizienten an.
Hinweis: Verwenden Sie für die ebene Teilchenwelle die komplexe Schreibweise und überlegen Sie, welche Wellenkomponenten in den jeweiligen Bereichen auftreten.

c) Stellen Sie die Gleichungen auf, welche die Ermittlung der Amplitudenkoeffizienten aus b) erlauben.

d) Betrachten Sie nun zusätzlich den Spezialfall $\lambda_{\mathrm{I}} = b/2$, wobei λ_{I} die Materiewellenlänge im Bereich I bezeichnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit T, mit der das Teilchen die Potentialmulde überwindet.

Lösung

a) Für die Beträge der Wellenvektoren gilt

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \equiv k_{\mathrm{III}}$$
$$k_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E + V_0)}$$

Quadriert man die Bedingung $k_{\mathrm{II}} = 4k_{\mathrm{I}}$, so ergibt sich $V_0 = 15E$.

b) In Bereich I und II besteht die Ortswellenfunktion $\phi_{\mathrm{I,II}}(x)$ aus einer einfallenden und einer reflektierten Welle. In Bereich II besteht die Ortswellenfunktion ϕ_{III} nur aus einer transmittierten Welle. Mit der Bedingung aus a) erhält man somit

$$\phi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}x} & x < 0 \\ C\mathrm{e}^{4\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}x} + D\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}x} & 0 < x < b \\ E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}x} & x > b \end{cases}$$

c) Aus der Anschluss- und Stetigkeitsbedingung an der Stelle $x = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} A + B &= C + D \\ A - B &= 4(C - D) \end{aligned}$$

Aus der Anschluss- und Stetigkeitsbedingung an der Stelle $x = b$ ergibt sich

$$\begin{aligned} C\mathrm{e}^{4\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}b} + D\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}b} &= E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}b} \\ 4\left(C\mathrm{e}^{4\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}b} - D\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}b}\right) &= E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{I}}b} \end{aligned}$$

d) Die Transmissionswahrscheinlichkeit T ist das Betragsquadrat des Amplitudenkoeffizienten E der transmittierten Ortswellenfunktion ϕ_{III}. Wählt man o.B.d.A. den Koeffizienten $A = 1$ und verwendet die Beziehung

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{I}}} = \frac{4\pi}{b}$$

so erhält man aus den Gleichungen aus c)

$$\begin{aligned} B &= C + D - 1 \\ 5C - 3D &= 2 \\ C + D &= E \\ 4(C - D) &= E \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $C = 10/16$, $D = 6/16$ und somit $E = 1$. Damit erhält man für die Transmissionswahrscheinlichkeit

$$T = |E|^2 = 1$$

Die einfallende Welle wird also vollständig transmittiert. Dies passiert immer wenn die Breite einer Potentialmulde (o.a. Barriere) einem Vielfachen der de-Broglie-Wellenlänge entspricht.

3 Wasserstoffatom im Magnetfeld

a) Die Spin-Bahn-Aufspaltung des Wasserstoffatoms zwischen $3^2\mathrm{P}_{1/2}$ und $3^2\mathrm{P}_{3/2}$ beträgt 0.108 cm^{-1}. Schätzen sie ab, bei welchem Magnetfeld der Zeeman-Effekt in den Paschen-Back-Effekt übergeht.

b) Skizzieren sie die Aufspaltung des 3P sowie des 2S Zustandes bei einem Magnetfeld von 4.5 T und tragen Sie in das Diagramm die möglichen Übergänge zwischen den Niveaus ein. Wie viele unterschiedliche Linien werden beobachtet?

c) Wie groß ist der energetische Abstand der Linien im Spektrum aus b).

Lösung

a) Als Faustregel gilt, dass die Kopplung von Drehimpuls L und Spin S erhalten bleibt, solange die Spin-Bahn-Wechselwirkung größer ist als die Aufspaltung im Magnetfeld. Der Übergang erfolgt, wenn die beiden Effekte in der gleichen Größenordnung liegen.

$$\begin{aligned} \Delta E_{LS} &\approx 0.1\ \mathrm{cm}^{-1} \cdot hc \\ \Delta E_B &\approx \mu_\mathrm{B} B \\ \Rightarrow B &= 0.2\ \mathrm{T} \end{aligned}$$

b) Nach Aufgabe a) erwarten wir bei einem Magnetfeld von 4.5 T, dass die Spin-Bahn-Kopplung aufgehoben ist. Es handelt sich also um den Bereich des Paschen-Back-Effekts. Drehimpuls L und Spin S richten sich unabhängig voneinander im Magnetfeld aus. Abb. 1 zeigt die schrittweise Aufspaltung der Niveaus. Für die Größe der Aufspaltung gilt

$$\Delta E_B = (g_l m_l + g_s m_s) \cdot \mu_\mathrm{B} B = (m_l + 2m_s) \cdot \mu_\mathrm{B} B$$

Das 3P-Niveau spaltet auf Grund der 3 Einstellungsmöglichkeiten von m_l und der 2 von m_s in $3 \cdot 2 = 6$ Komponenten auf. Dabei ist zu beachten, dass die Zustände mit $m_l = 1,\ m_s = -1/2$ und $m_l = -1,\ m_s = 1/2$ wegen $2 \cdot g_l = g_s = 2$ dieselbe Energie besitzen. Zur besseren Unterscheidbarkeit sind sie in Abb. 1 leicht versetzt gezeichnet. Analog spaltet der 2S Zustand in 2 Komponenten auf. Mit den Auswahlregeln

$$\begin{aligned} \Delta l &= \pm 1 \\ \Delta m_l &= 0, \pm 1 \\ \Delta m_s &= 0 \end{aligned}$$

ergeben sich die eingezeichneten Übergänge. Man beobachtet dann 3 unterschiedliche Linien im Spektrum.

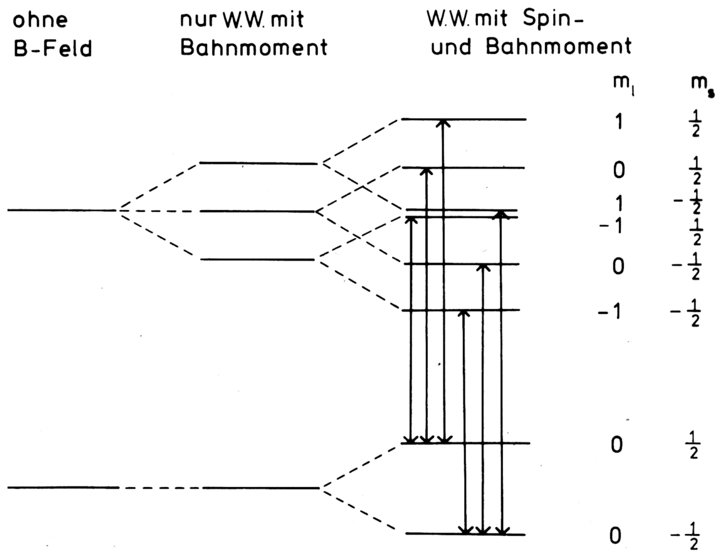


Abbildung 1: Paschen-Back-Effekt: Aufspaltung des 3P und des 2S Zustandes des Wasserstoffatoms im starken Magnetfeld

c) Aus Abb. 1 erkennt man leicht, dass für den Abstand der Linien gilt

$$\Delta E = \mu_{\mathrm{B}} B = 0.26 \text{ meV}$$

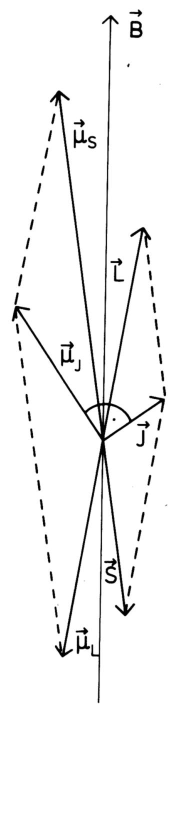
4 $^4\mathrm{D}_{1/2}$ im Magnetfeld

Warum spaltet ein $^4\mathrm{D}_{1/2}$ Zustand im schwachen Magnetfeld nicht auf?

Lösung
Für den $^4\mathrm{D}_{1/2}$ Zustand gilt $l = 2$, $s = 3/2$, $j = 1/2$. Der Landé-Faktor beträgt dann

$$g_j = 1 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - 2\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = 0$$

Somit ist die Aufspaltung ebenfalls Null. Eine anschauliche Erklärung liefert das Vektormodell. Das magnetische Moment μ_j präzediert im Magnetfeld um die Richtung von $\boldsymbol{J}$. Zur Berechnung von g_j muss man die Projektion von μ_j auf $\boldsymbol{J}$ betrachten. Hier jedoch steht das magnetische Moment senkrecht auf $\boldsymbol{J}$, so dass seine Projektion und damit g_j Null ist. Nebenstehende Grafik zeigt die Kopplung der Drehimpulse und der magnetischen Momente im Vektormodell für den $^4\mathrm{D}_{1/2}$ Zustand.



5 Betazerfall von Tritium

Beim β^--Zerfall zerfällt in einem Atomkern ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Elektronantineutrino ($n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$). Ein radioaktives Tritiumatom ^{3}H wandelt sich durch den Betazerfall in ein ^{3}He$^+$-Ion um. Die Wellenfunktion des Hüllenelektrons, das sich vor dem Zerfall im Grundzustand befindet, bleibe beim Zerfall ungestört. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass sich das Hüllenelektron des ^{3}He$^+$-Ions bei einer Messung im 1s-Zustand befindet? In einem wasserstoffähnlichen Atom lautet die Wellenfunktion für ein Elektron im Grundzustand

$$\psi_Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

Folgendes Integral könnte hilfreich sein

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}r\, r^n \mathrm{e}^{-ar} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Lösung

Vor dem Zerfall befindet sich das Elektron im Grundzustand ϕ des Tritiumatoms. Die Kernladungszahl beträgt $Z = 1$. Es gilt also

$$\phi = \psi_{Z=1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}}$$

Nach dem Zerfall befindet sich das Elektron weiterhin im Zustand ϕ, der nun allerdings nicht mehr der Grundzustand des Heliumions ($Z = 2$) ist. Denn der Grundzustand von ^{3}He$^+$ lautet

$$\psi_{Z=2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_0}}$$

Wir suchen nun also den Koeffizienten der Projektion von $\psi_{Z=2}$ auf $\phi = \psi_{Z=1}$. Die Wahrscheinlichkeit das Elektron im 1s-Zustand zu finden beträgt dann

$$\begin{aligned}
P &= |\langle \psi_{Z=2} | \psi_{Z=1} \rangle|^2 = \left| \int d^3r\, \psi^*_{Z=1} \psi_{Z=2} \right|^2 = \\
&= \left| \int\limits_0^\infty dr\, 4\pi r^2 \psi^*_{Z=1} \psi_{Z=2} \right|^2 = \left| 4 \left(\frac{2}{a_0^2}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty dr\, \mathrm{e}^{-\frac{3r}{a_0}} \right|^2 = \\
&= \left(\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)^2 \approx 0.702
\end{aligned}$$

6 Pauli-Prinzip, Gesamtdrehimpuls des Atoms

Gemäß dem Pauli-Verbot kann jeder Quantenzustand für Elektronen nur mit einem Elektron besetzt werden. Auch in Mehrelektronenatomen werden dabei die Elektronenzustände durch vier Quantenzahlen, hier (n, l, m_l, m_s) beschrieben. Im Grundzustand sind die am stärksten gebundenen Zustände besetzt. Innerhalb einer Elektronenschale werden die Zustände mit niedrigerem l zuerst besetzt, da diese in Mehrelektronenatomen stärker gebunden sind.

a) Geben Sie an, wie viele Elektronen sich bei Helium, Neon ($Z = 10$), Phosphor ($Z = 15$) und Kupfer ($Z = 29$) jeweils in der K-, L-, M- und N-Schale befinden!

b) Geben Sie für alle in (a) genannten Elemente an, wie viele Elektronen einen Bahndrehimpuls von $l = 0$ und wie viele einen Bahndrehimpuls von $l = 2$ besitzen!

c) Geben Sie alle Quantenzahlen für die beiden Elektronen im Grundzustand von Helium an!

d) Drei stabile Neon-Isotope mit 10, 11 und 12 Neutronen im Kern sind bekannt. Ist es prinzipiell möglich mit einem oder mehreren dieser Isotope ein Bose-Einstein-Kondensat zu erzeugen und wenn ja mit welchen(m)? Begründen Sie ihre Antwort!

Lösung

a) Die Schalen werden nacheinander entsprechend der ansteigenden Energie aufgefüllt, wobei zu beachten ist, dass sich in jedem Zustand höchstens ein Elektron befinden darf. Man erhält:

Element	K-Schale	L-Schale	M-Schale	N-Schale
Helium	2	0	0	0
Neon	2	8	0	0
Phosphor	2	8	5	0
Kupfer	2	8	18	1

b) In jeder Schale gibt es 2 Zustände mit $l = 0$ ab der L-Schale 6 Zustände mit $l = 1$ und ab der M-Schale 10 Zustände mit $l = 2$. Die Zustände in einer Schale werden nacheinander entsprechend aufsteigender Quantenzahl besetzt. Damit lautet das Ergebnis:

Element	$l = 0$	$l = 2$
Helium	2	0
Neon	4	0
Phosphor	6	0
Kupfer	7	10

c) Die Quantenzahlen der Elektronen im Grundzustand von Helium lauten:
$n_1 = 0,\ l_1 = 0,\ m_{l_1} = 0,\ m_{s_1} = 1/2$ und $n_2 = 0,\ l_2 = 0,\ m_{l_2} = 0,\ m_{s_2} = -1/2$

d) Bose-Einstein-Kondensate können nur mit Bosonen erzeugt werden. Bosonen sind alle Atome, bei denen die Gesamtzahl von Protonen, Neutronen und Elektronen gerade ist. Neutrales Neon besitzt jeweils eine gerade Zahl von Protonen und Elektronen, damit sind diejenigen Isotope mit einer geraden Zahl von Neutronen (^{20}Ne mit 10 und ^{22}Ne mit 12 Neutronen) Bosonen und können ein Bose-Einstein-Kondensat bilden.

7 Rotationsanregungen

Im Kochsalzmolekül ^{23}Na^{35}Cl besitzen die beiden Atome einen Gleichgewichtsabstand von $r_0 = 5.6$ Å

a) Wie groß ist das Trägheitsmoment I des Moleküls

b) Wie groß ist die Energie für den Rotationszustand mit $j = 1$?

c) Die lineare Rückstellkraft des harmonischen Potentials zwischen den Kernen ist gegeben durch die Konstante $k = 3.78 \cdot 10^3$ kgs^{-2}. Wie groß sind die Energieabstände zwischen den Schwingungszuständen?

Lösung

a) Das Trägheitsmoment errechnet sich über

$$I = \mu r_0^2$$

Für die reduzierte Masse erhält man

$$\mu = \frac{m_{\mathrm{Na}} m_{\mathrm{Cl}}}{m_{\mathrm{Na}} + m_{\mathrm{Cl}}} = \frac{23\ \mathrm{u} \cdot 35\ \mathrm{u}}{23\ \mathrm{u} + 35\ \mathrm{u}} = \frac{805}{58}\mathrm{u} \approx 2.30 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

Das Trägheitsmoment beträgt somit $I = 7.23 \cdot 10^{-45}$ kgm^2.

b) Für die Rotationsenergie gilt

$$E_{\mathrm{rot}}(j) = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I}$$

Die Energie des Rotationszustandes mit $j = 1$ beträgt mit dem in a) berechneten Trägheitsmoment $E_{\mathrm{rot}}(j = 1) = 9.60$ meV.

c) Für die Energie der Schwingung gilt

$$E_{\mathrm{vib}}(n) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Wie beim harmonischen Oszillator haben die einzelnen Energien einen äquidistanten Abstand von $\hbar\omega$. Für die Frequenz ω gilt nun

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Mit der in a) berechneten reduzierten Masse μ und der angegebenen Konstanten k erhält man nun für den energetischen Abstand

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}} \approx 0.27 \text{ eV}$$

8 Zusatzaufgabe

Auf dem Formelblatt hat sich ein Fehler eingeschlichen! Wo?

Lösung
Die angegebene Schrödinger-Gleichung ist falsch! Vor das Potential in der eckigen Klammer gehört ein Minuszeichen statt einem Pluszeichen.