

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

2010

Übung 1

1. Wellenpakete (*)

Geben Sie die Formeln für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit allgemein für Wellenpakete an, die in Abhängigkeit von Kreisfrequenz ω und Wellenzahl $k(\omega)$ beschrieben werden. Welches Frequenzspektrum muss ein Wellenpaket haben, damit man von einer Gruppengeschwindigkeit reden kann? Veranschaulichen Sie die Verhältnisse für zwei beitragende Frequenzen (Schwebung)!

Hinweis: $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

Lösung

Die Phasengeschwindigkeit $v_{\text{Ph}}(\omega) = \omega/k$ entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenfronten der zum Wellenpaket beitragenden Frequenzanteile ω .

Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert als $v_{\text{Gr}} = d\omega/dk|_{\omega=\omega_0}$, welche nur sinnvoll interpretiert werden kann, wenn das Frequenzspektrum des Wellenpakets ausreichend schmal um die mittlere enthaltene Frequenz ω_0 verteilt ist, so dass v_{Gr} über diesen Bereich nicht stark variiert. Dann entspricht die Gruppengeschwindigkeit der Geschwindigkeit, mit der sich das Wellenpaket als Ganzes (d.h. dessen Schwerpunkt) bewegt.

Dies wird deutlich bei der Überlagerung zweier Wellen

$$\psi_1 = \sin [(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta \omega)t] \quad \text{und} \quad \psi_2 = \sin [(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t]$$

mit ähnlicher Wellenlänge (Schwebung)

$$\psi_1 + \psi_2 = 2 \sin(kx - \omega t) \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \quad (1)$$

Die entstehende Schwebung besteht aus einer (schnellen) Oszillation mit der gemittelten Frequenz (1. Term), die durch einen (langsam veränderlichen) Term moduliert wird. D.h. die unendlich ausgedehnte ebene Welle ψ_1 wird durch Überlagerung mit ψ_2 in eine Kette von 'Wellenpaketen' verwandelt. Die Grundschwingung hat eine Phasengeschwindigkeit von $v_{\text{Ph}} = \omega/k$ die 'Wellenpakete' bewegen sich entsprechend mit $v = \Delta\omega/\Delta k \rightarrow d\omega/dk$,

2. Ortswellenfunktion, Wahrscheinlichkeitsinterpretation (*)

Die quantenmechanische Wellenfunktion eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(x) = Nxe^{-a\frac{|x|}{2}}$$

- a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N so, dass die Wellenfunktion auf Eins normiert ist, d.h. dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1$$

gilt und begründen Sie die Notwendigkeit von normierten Wellenfunktionen für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation in der Quantenmechanik. Welche Einheit hat die Wellenfunktion?

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Ort $x = 0$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Intervall $[-1/a, 1/a]$ zu finden?

Hinweis: $x^n e^{-ax} = \left(-\frac{d}{da}\right)^n e^{-ax}$

Lösung

- a) Für das Integral über das Betragsquadrat der Wellenfunktion erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx N^2 x^2 e^{-a|x|} = 2N^2 \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-ax} = 2N^2 \int_0^{\infty} dx \frac{d^2}{da^2} e^{-ax} = \\ &= 2N^2 \frac{d^2}{da^2} \int_0^{\infty} dx e^{-ax} = 2N^2 \frac{d^2}{da^2} \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^{\infty} = 2N^2 \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{a} = \\ &= \frac{4N^2}{a^3} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{a^{3/2}}{2} \end{aligned}$$

Die (bis auf einen konstanten Phasenfaktor) normierte Wellenfunktion lautet somit

$$\psi(x) = \frac{a^{3/2}}{2} x e^{-a\frac{|x|}{2}}$$

Der Normierungsfaktor ist notwendig um (wie in der Vorlesung erwähnt) $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren zu können. Über den gesamten Raum integriert muss sie Eins ergeben, da sich das mit ihr assoziierte Teilchen irgendwo im Raum befinden muss.

Da $|\psi(x)|^2$ eine eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Dimension $1/m$ ist, muss $\psi(x)$ selbst die Dimension $1/\sqrt{m}$ haben.

- b) Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen exakt an einem gegebenen Ort zu finden ist Null. Die Wahrscheinlichkeit P das Teilchen im Intervall $[-1/a, 1/a]$ zu finden ist

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-1/a}^{1/a} dx |\psi(x)|^2 = \dots = 2N^2 \frac{d^2}{da^2} \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^{1/a} = 2N^2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{a} = \\
 &= 2N^2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \frac{2}{a^3} = 2 \frac{a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \frac{2}{a^3} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63
 \end{aligned}$$

3. Potentialkasten (*)

Ein kräftefreies Teilchen befinde sich in einem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

in einem seiner stationären Zustände

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

- a) Zeigen Sie, dass diese Zustände normiert sind und bestimmen sie die Energieeigenwerte E_n . Welche Energie ist nötig um ein Elektron, das sich in einem Potentialkasten der Breite 1 nm befindet, vom Grundzustand in den zweiten angeregten Zustand anzuregen.
Hinweis: Masse des Elektrons $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes x und des Impulsoperators \hat{p} für die stationären Zustände und interpretieren Sie die Ergebnisse.
- c) Berechnen Sie die Energieunschärfe $\Delta \hat{H}$ für die stationären Zustände und interpretieren Sie das Ergebnis.
- d) Nehmen Sie nun an, das Potential hätte eine endliche Höhe. Was bedeutet dies qualitativ für das Teilchen?

Hinweis: $\int dx \cos^2(ax) = \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{x}{2} + \text{const.}$

Lösung

a) Für das Integral über das Betragsquadrat der Wellenfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi_n(x)|^2 &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} dx \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \\ &= \frac{4}{a} \left[\frac{\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{\frac{4n\pi}{a}} + \frac{x}{2} \right]_0^{a/2} = \frac{4}{a} \left(\frac{\sin(n\pi)}{\frac{4n\pi}{a}} + \frac{a}{4} \right) = \frac{4}{a} \frac{a}{4} = 1\end{aligned}$$

Die stationären Zustände $\varphi_n(x)$ sind also normiert.

Die Schrödinger-Gleichung im interessierenden Bereich $[-a/2, a/2]$ lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x)$$

Setzt man die stationären Zustände ein erhält man

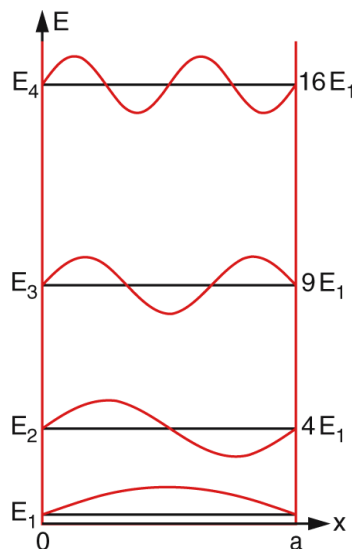
$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = E_n \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Die Eigenenergien lauten somit

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} = n^2 E_1$$

mit der sog. Nullpunktsenergie E_1 . Die notwendige Anregungsenergie für das Elektron beträgt

$$E_3 - E_1 = 8E_1 = 3.00 \text{ eV} \quad (2)$$



b) Für den Erwartungswert des Ortes gilt

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_n^*(x) x \varphi_n(x) = \int_{-a/2}^{a/2} dx x |\varphi_n(x)|^2 = 0$$

und für den Erwartungswert des Impulsoperators gilt

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_n^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \varphi_n(x) = -i\hbar \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{d}{dx} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &= i\hbar \frac{2n\pi}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Ortes liegt natürlich in der Mitte des Potentialkastens. Dass der Erwartungswert des Impulses verschwindet wird ersichtlich wenn man sich überlegt, dass sich das Teilchen im Potentialkasten in beide Richtungen bewegen kann. Zu jedem Impuls in positive x -Richtung gibt es auch einen Impuls in negative x -Richtung. Der Erwartungswert muss also dementsprechend verschwinden.

c) Die Energieunschärfe $\Delta \hat{H}$ ist gegeben durch

$$\Delta \hat{H} = \sqrt{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2}$$

Für die Erwartungswerte von \hat{H} und \hat{H}^2 erhält man

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_n^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi_n(x) = \\ &= -\frac{2}{a} \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{d^2}{dx^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \\ &= \frac{2}{a} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 2 \int_0^{a/2} dx \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 2 \frac{a}{4} = \\ &= \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} = E_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_n^*(x) \left(\frac{\hbar^4}{4m^2} \frac{d^4}{dx^4} \right) \varphi_n(x) = \\
&= \frac{2}{a} \frac{\hbar^4}{4m^2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{d^4}{dx^4} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \\
&= \frac{2}{a} \frac{\hbar^4}{4m^2} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 2 \int_0^{a/2} dx \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a} \frac{\hbar^4}{4m^2} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 2 \frac{a}{4} = \\
&= \frac{\hbar^4 n^4 \pi^4}{4m^2 a^4} = \left(\frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}\right)^2
\end{aligned}$$

Die Energieunschärfe lautet somit

$$\Delta \hat{H} = \sqrt{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2} = \left(\frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}\right)^2 - \left(\frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}\right)^2 = 0$$

Die Energieunschärfe verschwindet natürlich, da die stationären Zustände Eigenzustände des Hamilton-Operators sind. Die Energie ist also scharf messbar.

- d) Die Teilchen können nun etwas in den Bereich außerhalb des Kastens eindringen, dadurch ändert sich die Wellenfunktion. Die vorherigen Randbedingungen $\varphi_n(-a/2) = \varphi_n(a/2) = 0$ gelten nicht mehr. Die Wellenlänge wird größer und damit die Energien kleiner.

4. Potentialbarriere (***)

Ein Teilchen mit Masse m und kinetischer Energie $E < V_0$ trifft von links auf eine Potentialbarriere der Form

$$V(x) = V_0 \Theta(x) \Theta(a-x) \begin{cases} V_0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$.

- Wie lautet der Ansatz für die Wellenfunktion $\psi(x)$? Überlegen Sie sich dazu auch die physikalischen Randbedingungen, also aus welchen Anteilen die in den einzelnen Bereichen auftretenden Lösungen bestehen können. Skizzieren Sie das Potential und die Wellenfunktion.
- Ermitteln Sie die Bestimmungsgleichungen für die in der Wellenfunktion auftretenden Koeffizienten aus der Bedingung, dass die Wellenfunktion stetig differenzierbar sein soll. Sie sollen diese Bestimmungsgleichungen nicht lösen!
- Wie nennt man den hier auftretenden Effekt der sich aus der Wellenfunktion erkennen lässt? Erklären Sie diesen Effekt kurz.

Gehen Sie nun vom Fall $a \rightarrow \infty$ aus. Aus der Potentialbarriere wird somit eine Potentialschwelle

$$V(x) = V_0 \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

- d) Wie lautet nun der Lösungsansatz? Bestimmen Sie die dabei auftretenden Koeffizienten und bestimmen Sie die Reflexionswahrscheinlichkeit R für den Fall $E = V_0/2$.

Hinweis: Die Resultate aus c) könnten nützlich sein. Die Reflexionswahrscheinlichkeit R ist das Betragsquadrat der Amplitude der reflektierten Welle.

- e) Wie lautet der Lösungsansatz für den Fall $E > V_0$? Was hat sich nun effektiv geändert? Bestimmen Sie die Reflexions- R und die Transmissionswahrscheinlichkeit T für den Fall $E = 9V_0/5$ und zeigen Sie dass $R + T = 1$ gilt.

Hinweis: Die Transmissionswahrscheinlichkeit ist das Betragsquadrat der Amplitude der transmittierten Welle multipliziert mit dem Quotient aus dem Wellenvektor der transmittierten Welle und dem Wellenvektor der reflektierten Welle.

Lösung

- a) In Bereich I ($x < 0$) lautet die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I(x) = E \psi_I(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_I(x)$$

bzw. umgeformt

$$\psi_I''(x) + k^2 \psi_I(x) = 0$$

mit Wellenvektor $k = \sqrt{2mE}/\hbar > 0$. Die Lösungen dieser DGL sind von der Form

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + \rho e^{-ikx}$$

Dabei handelt es sich um eine einfallende Welle mit Amplitude A , wobei man o.B.d.A. $A = 1$ wählen kann, und eine reflektierte Welle mit Amplitude ρ .

In Bereich II ($0 < x < a$) lautet die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I(x) + V_0 \psi_I(x) = E \psi_I(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_I(x)$$

bzw. umgeformt

$$\psi_{II}''(x) - \kappa^2 \psi_{II}(x) = 0$$

mit Wellenvektor $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar > 0$. Die Lösungen dieser DGL sind von der Form

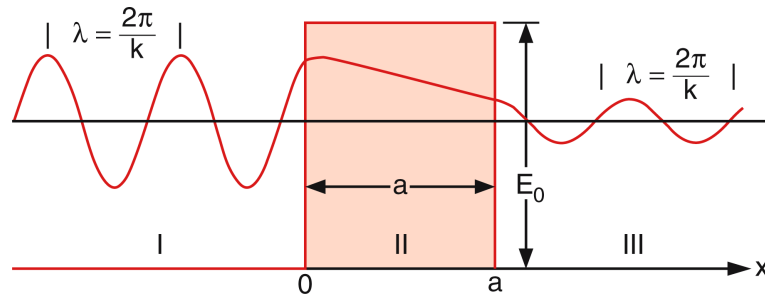
$$\psi_{II}(x) = B e^{\kappa x} + C e^{-\kappa x}$$

In Bereich III ($x > a$) ist die Schrödinger-Gleichung analog zu Bereich I ($x < 0$), die Lösung ist daher von der Form

$$\psi_{\text{III}}(x) = \tau e^{ik(x-a)} + D e^{-ik(x-a)}$$

mit dem selben Wellenvektor k wie in Bereich I. Der Koeffizient D muss hier gleich Null sein, da sich sonst das Teilchen auch von rechts an die Barriere annähern würde. Hier handelt es sich also nur noch um eine transmittierte Welle, die an der Stelle $x = a$ gerade die volle Amplitude τ besitzt. Insgesamt erhält man also als Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \rho e^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ B e^{\kappa x} + C e^{-\kappa x} & \text{für } 0 < x < a \\ \tau e^{ik(x-a)} & \text{für } x > a \end{cases}$$



- b) An der Stelle $x = 0$ muss $\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0)$ und $\psi'_{\text{I}}(0) = \psi'_{\text{II}}(0)$ gelten. Man erhält somit die 2 Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + \rho &= B + C \\ ik(1 - \rho) &= -\kappa(B - C) \end{aligned}$$

An der Stelle $x = a$ muss $\psi_{\text{II}}(a) = \psi_{\text{III}}(a)$ und $\psi'_{\text{II}}(a) = \psi'_{\text{III}}(a)$ gelten. Man erhält somit die 2 Gleichungen

$$\begin{aligned} B e^{-\kappa a} + C e^{\kappa a} &= \tau \\ -\kappa B e^{-\kappa a} + \kappa C e^{\kappa a} &= ik\tau \end{aligned}$$

- c) Es handelt sich hierbei um den Tunneleffekt. Teilchen mit der Energie E können mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit in Potentialbereiche $V_0 > E$ eindringen und diese sogar durchtunneln, was aus klassischer Sicht nicht möglich wäre.

- d) Hier müssen nur noch zwei Bereiche betrachtet werden. Für Bereich I ($x < 0$) lautet die Lösung analog zu c)

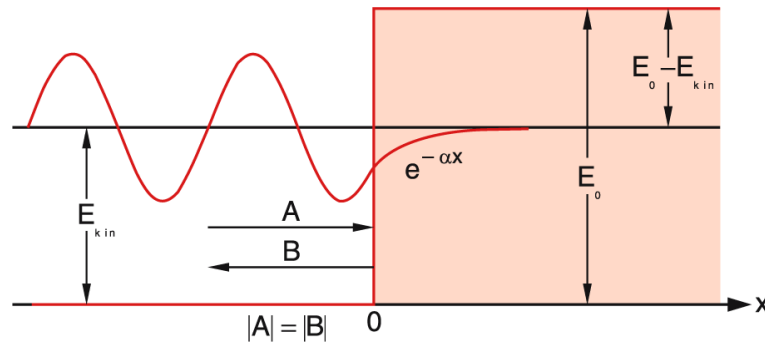
$$\psi_{\text{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

mit Wellenvektor $k = \sqrt{2mE}/\hbar > 0$. Auch hier wählen wir o.B.d.A. $A = 1$. Im Bereich II ($x > 0$) lautet die Lösung analog zu c)

$$\psi_{\text{II}}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$$

mit Wellenvektor $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar > 0$. Aufgrund der Normierungsbedingung muss $C = 0$ sein, da sonst $\psi_{\text{II}}(x)$ für $x \rightarrow \infty$ divergieren würde. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ De^{-\kappa x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



Aus den Anschluss- und Stetigkeitsbedingungen erhalten wir analog zu c) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + B &= D \\ ik(1 - B) &= -\kappa D \end{aligned}$$

Daraus erhält man mit

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar}{\sqrt{2mE}/\hbar} = \sqrt{\frac{V_0}{E} - 1} \quad (3)$$

für die Koeffizienten B und D

$$\begin{aligned} B &= \frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \\ D &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \end{aligned}$$

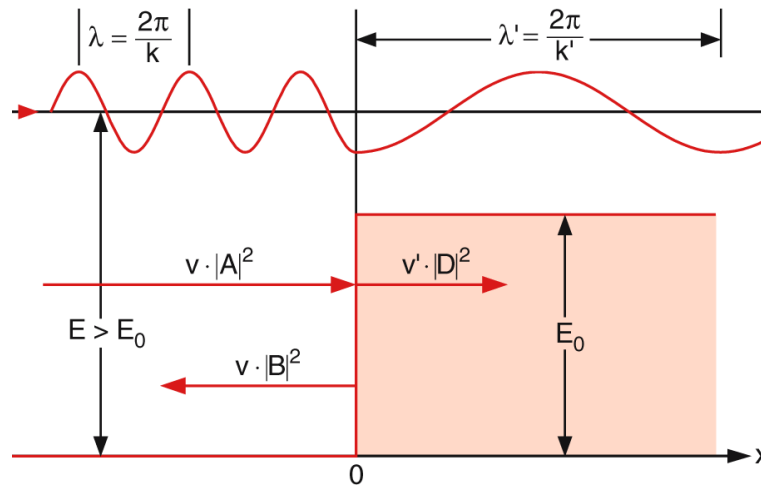
Die Reflexionswahrscheinlichkeit R für den Fall $E = V_0/2$ ist nun gegeben durch

$$R = |B|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1-2}}{1 + \sqrt{1-2}} \right|^2 = \left| \frac{1-i}{1+i} \right|^2 = 1$$

Die einfallende Welle wird also vollständig reflektiert. Trotzdem gibt es eine von Null verschiedene Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Welle in der Barriere.

- e) Für den Fall $E > V_0$ ist die Wellenfunktion in Bereich I ($x < 0$) dieselbe wie davor (auch in diesem Fall gibt es einen reflektierten Anteil). In Bereich II ($x > 0$) jedoch ist die Wellenfunktion nun nicht mehr exponentiell abfallend sondern besteht aus einer transmittierten Welle mit Wellenvektor $k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Die Wellenfunktion lautet also insgesamt

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ De^{ik'x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



Für die Koeffizienten B und D erhalten wir die selben Ausdrücke wie in d), nur sind die Wurzeln hier reell. Für $E = 9V_0/5$ ergibt sich die Reflexionswahrscheinlichkeit

$$R = |B|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - 5/9}}{1 + \sqrt{1 - 5/9}} \right|^2 = \left| \frac{1/3}{5/3} \right|^2 = \frac{1}{25}$$

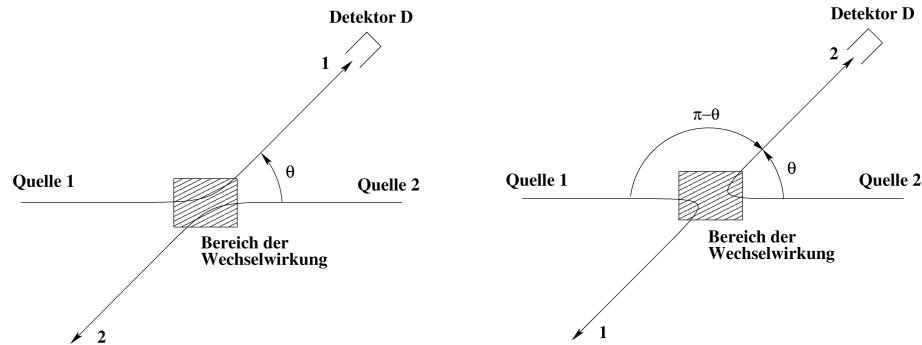
und die Transmissionswahrscheinlichkeit

$$T = \frac{k'}{k} |D|^2 = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} \left| \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 5/9}} \right|^2 = \frac{2}{3} \left| \frac{2}{5/3} \right|^2 = \frac{24}{25}$$

Es gilt also $R + T = 1$ wie es die Energieerhaltung fordert.

5. Streuung und Interferenz (**)

Wir betrachten die (quantenmechanische) Streuung von roten und grünen Teilchen aneinander. Die Streuamplitude für ein unter dem Winkel θ gestreutes Teilchen laute $f(\theta)$.



- a) Wie groß ist die Gesamtstreuwahrscheinlichkeit (also die Wahrscheinlichkeit, dass ein rotes oder grünes Teilchen im Detektor D detektiert wird), wenn rote an grünen Teilchen streuen?

Nehmen Sie von nun ab an, dass die Teilchen entweder Fermionen oder Bosonen sein können.

- b) Wie groß ist dann jeweils die Gesamtstreuwahrscheinlichkeit, wenn gleichfarbige aneinander gestreut werden? Beachten Sie die Teilchenaustauschsymmetrie!
- c) Welche Streuwahrscheinlichkeit ergibt sich jeweils für Streuung unter $\theta = 90^\circ$?

Lösung

- a) Rot und grün sollen hier stellvertretend für verschiedene Quantenzahlen stehen, also z.B. für die z -Komponente des Spins: Spin up und Spin down. Die Wellenfunktion der Streuung zweier unterscheidbarer Teilchen ist für großes r allgemein gegeben durch

$$\psi \propto e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (4)$$

d.h. durch eine einlaufende ebene Welle und eine auslaufende Kugelwelle.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (5)$$

und damit proportional zur Streuwahrscheinlichkeit.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie ein gestreutes Teilchen in den Detektor D gelangen kann:

- i) Teilchen 1 wird an Teilchen 2 um den Winkel θ gestreut.
- ii) Teilchen 2 wird an Teilchen 1 um den Winkel $\pi - \theta$ gestreut.

Da das rote Teilchen vom grünen Teilchen unterscheidbar ist, lautet die Gesamtstreuwahrscheinlichkeit

$$P = P_1 + P_2 = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2$$

- b) Bosonen sind über ihr Verhalten unter Teilchenaustausch (hier Austausch der Teilchenkoordinaten) definiert. Dabei muss die (Zweiteilchen-) Wellenfunktion für Bosonen total symmetrisch ($\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$) und die Wellenfunktion für Fermionen total antisymmetrisch ($\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$) sein. Bei der Streuung zweier ununterscheidbarer Teilchen bedeutet der Austausch der zwei Teilchenkoordinaten Vorzeichenaustausch der relativen Koordinate, d.h. $x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$ bzw. $r \rightarrow r, \theta \rightarrow \pi - \theta, \varphi \rightarrow \pi + \varphi$. Damit ist die symmetrisierte Wellenfunktion

$$\psi \propto e^{ikz} \pm e^{-ikz} + (f(\theta) \pm f(\pi - \theta)) \frac{e^{ikr}}{r}$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt ist daher

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2$$

Das '+' gilt für Bosonen und das '-' für Fermionen. Aufgrund der Ununterscheidbarkeit der jeweils gleichfarbigen Teilchen tritt also ein zusätzlicher Interferenzterm I auf

$$P = P_1 + P_2 \pm I = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2 = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \pm I$$

wobei auch hier das '+' für Bosonen und das '-' für Fermionen gilt.

- c) Für Bosonen gilt

$$P = |f(\pi/2) + f(\pi/2)|^2 = 4|f(\pi/2)|^2$$

und für Fermionen gilt

$$P = |f(\pi/2) - f(\pi/2)|^2 = 0$$

6. Rutherford-Streuung (**)

Eine $0.4 \mu\text{m}$ dicke Goldfolie (Ordnungszahl: 79, Dichte: 19.3 g/cm^3 , molare Masse: 197 g) wird mit α -Teilchen beschossen. Die kinetische Energie der Teilchen beträgt 4.8 MeV , die elektrische Stromstärke des Strahls 10 pA . Der Detektor mit einer kreisförmigen Öffnung von 4 cm Durchmesser befindet sich in 2 m Abstand.

- a) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit vom Streuwinkel θ mit der Rutherford-Streufornel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

- b) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen, die in jeder Sekunde um mehr als 90° abgelenkt werden.
Hinweis: $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, Avogadro-Konstante: $N_A = 6.02214 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- c) Bestimmen Sie die Zählraten im Detektor für einen Streuwinkel von 5° .

Lösung

- a) Mit der Rutherford-Streufornel erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \underbrace{\left(\frac{1}{4\epsilon_0} \frac{Z_{\text{Au}} Z_\alpha e^2}{4E} \right)^2}_{=:S} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1.40}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \text{ barn}$$

wobei $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$.

- b) Aus der gegebenen Stromstärke des Strahls erhält man

$$I = \frac{dQ}{dt} = 2e \frac{dN_\alpha}{dt} = 2e \dot{N}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{N}_\alpha = \frac{I}{2e}$$

Die Luminosität ist das Produkt aus Teilchenstromdichte Φ_α und der Anzahl der im Strahl stehenden Streuzentren N_{Au}

$$L = \Phi_\alpha N_{\text{Au}} = \frac{\dot{N}_\alpha}{A} n_{\text{Au}} A dx = \frac{I}{2e} \frac{N_A}{M_{\text{Au}}} \rho_{\text{Au}} = \frac{I}{2e} \frac{\rho_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}} = 7.36 \cdot 10^{32} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

wobei N_A die Avogadro-Konstante, n_{Au} die Teilchendichte, M_{Au} die molare Masse, ρ_{Au} die Massendichte und m_{Au} die atomare Masse des Gold-Targets sind.

Mit der Beziehung

$$d\dot{N}_\alpha = L \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

ergibt sich für die Anzahl der Teilchen die pro Sekunde um mehr als 90° gestreut werden (die z -Achse wird entlang des einfallenden Strahls gelegt)

$$\begin{aligned} \dot{N}_\alpha &= L \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi LS \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} = \\ &= 4\pi LS \int_{1/2}^1 du \frac{1}{u^2} = 4\pi LS = 1.30 \text{ MHz} \end{aligned}$$

wobei der Hinweis und die Substitution $u = \sin^2 \frac{\theta}{2}$ verwendet wurden.

c) Für einen Streuwinkel von $\theta = 10^\circ$ erhält man mit der aktiven Detektorfläche

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{(d/2)^2 \pi}{r^2} = \pi \cdot 10^{-4} = 3.14 \cdot 10^{-4}$$

und der Luminosität und dem differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\dot{N}_\alpha(\theta = 5^\circ) = L \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 5^\circ) \Delta\Omega = 0.56 \text{ MHz}$$