Wellen und Dipolstrahlung

Florian Hrubesch

25. März 2010

1 Bragg Reflexion

1.1 Natriumkristall

a) In kristallinem Natrium sitzen die Atome auf den Eck- und Mittelpunkten eines (flachenzentriert kubisches Gitter), das aus wurfelformigen Einheitszellen der Kantenlange $a = 4,29$Å aufgebaut ist. Sie beugen monochromatische Rontgenstrahlung der Wellenlange $\lambda = 1,54$Å an den zu den Wurfelseiten parallelen Netzebenen. Bei welchen Beugungswinkeln tritt Bragg-Reflexion auf?

b) Ein Neutronenstrahl fallt auf polykristallines Wismut (größter Gitterebenenabstand 4Å). Man suche den Energiebereich der Neutronen, fur den dieser Filter keine koharente Streuung liefert. Leiten Sie diesen aus dem Ausdruck $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ her.

Lösung:

a) Es ist im Wesentlichen nach der Bragg-Beziehung gefragt. Trifft Röntgenlicht auf das dreidimensionale Gitter, so interferieren die an verschiedenen Netzebenen gestreuten Strahlen konstruktiv, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge λ beträgt. Dies führt zur Bragg-Bedingung

$$n\lambda = 2dsin\theta \tag{1}$$

Der Netzebenenabstand parallel zu denWürfelseitenflächen beträgt $d = \frac{a}{2} = 2,145$Å, da man ja die Mittelatome mitzählen muss.Wir haben also die Gleichung:

$$sin\theta_n = 0,359n \tag{2}$$

also $\theta_n = arcsin(0.359n)$ für n = 1, 2, ... Lösungen sind $\theta_1 = 21.0^o$, $\theta_2 = 45.9^o$. Für größere n gibt es keine Lösung.

b) Es gilt natürlich wieder die Bragg-Bedingung $n\lambda = 2dsin\theta$. Sie kann nicht mehr erfüllt werden, wenn $\lambda > 2d_{max}$ ist , also $\lambda > 0.8nm$. Oberhalb dieser Grenzwellenläge haben wir keine kohärente Streuung mehr. Es ist $k = 2\pi/\lambda$, also folgt $\lambda = h/p2mE$. Also ist der gesuchte Energiebereich

$$0 \leq E \leq \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2d_{max}}\right)^2 = 1,3 \cdot 10^{-3}eV \approx 2 \cdot 10^{-22}J \tag{3}$$

1.2 Monochromator

Thermische Neutronen ($20°C$) aus einem Reaktor werden durch Bragg-Streuung an einem Silizium-Einkristall monochromatisiert.

a) Die Neutronen mit der Energie $E_b = k_bT$ werden dabei um $33.2°$ von der Einfallsrichtung abgelenkt. Berechnen Sie unter der Annahme, dass es sich um einen Bragg-Peak erster Ordnung handelt, den Netzebenenabstand von Silizium.

b) Der gleiche Monochromator soll nun für Photonen benutzt werden. Welche Energie müssen diese haben, wenn die gestreuten Photonen unter dem gleichen Winkel beobachtet werden sollen?

c) Wie groß wäre der Ablenkwinkel bezüglich der Einfallsrichtung bei Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 MeV?

Lösung:

a) Thermische neutronene dürfen nichtrelativistisch behandelt werden:

$$E_b = k_bT = 8.62 \cdot 10^{-5}\frac{eV}{K} \cdot 293K \approx 2.5 \cdot 10^{-2}eV \tag{4}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} \tag{5}$$

$$p = \sqrt{2mE} \tag{6}$$

Mit der De-Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15}eVs}{\sqrt{2 \cdot 939.57 \cdot 10^6 eV/\left(3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-2}eV}} \tag{7}$$

$$\approx 1.81\text{Å} \tag{8}$$

Mit der Beziehung für Bragg-Streuung erhalten wir nun:

$$a = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{1.81\text{Å}}{2\sin(16.6°)} \approx 3.17\text{Å} \tag{9}$$

b)

$$\lambda_{ph} = \lambda_n \tag{10}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad = \frac{1.24 \cdot 10^{-6} eVm}{1.81\text{Å}} \approx 6.85keV \tag{11}$$

c) Hier müssen wir relativistisch rechnen.

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2 \tag{12}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E_k^2 + 2E_kE_0} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}\sqrt{(1 \cdot 10^6 eV) + 1 \cdot 10^6 eV \cdot 511 \cdot 10^3 eV} \tag{14}$$

$$\approx 4.1 \cdot 10^{-3} \frac{eVm}{s} \tag{15}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} eVs}{4.1 \cdot 10^{-3} \frac{eVs}{m}} \approx 1 \cdot 10^{-12} m \tag{16}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2a}\right) = \arcsin\left(\frac{1 \cdot 10^{-12} m}{2 \cdot 3.17 \cdot 10^{-10} m}\right) \approx 0.09° \tag{17}$$

Der Winkel bezüglich der Einfallsebene ist dann $0.18°$

2 Photoeffekt

2.1 Diskrete Lichtquelle

Mit der Gegenfeldmethode wird beim Photoeffekt die kinetische Energie der herausgelösten Elektronen bestimmt. Eine Photokathode aus Cäsium mit einer Austrittsarbeit $W_A = 1,9eV$ wird von einer Lichtquelle beschienen, die kein kontinuierliches Spektrum emittiert, sondern drei diskrete Linien. Als Funktion der Gegenspannung wird folgender Elektronenstrom gemessen:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Planckschen Wirkungsquantums $h = 6,63 \cdot 10^{-34} Js$

a) die Photonenenergien in eV

b) die Lichtfrequenzen in THz

c) die Wellenlängen der drei Spektrallinien in nm.

d) Wie groß ist die Unsicherheit (größter Fehler) in der Bestimmung der Wellenlängen (Teilaufgabe c)), wenn die Unsicherheit der Ablesung der Gegenfeldspannung 0,03 eV beträgt? Geben Sie die Unsicherheit für alle drei Wellenlängen absolut und relativ an!

Lösung:

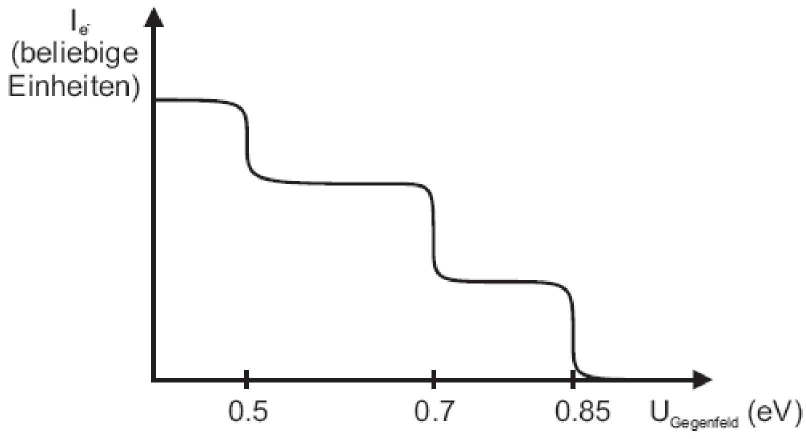

Abbildung 1: Aufgabe 1

a) Die kinetische Energie der ausgelösten Photoelektronen bestimmt sich nach

$$E_{kin} = eU = hf - W_A \tag{18}$$

Die Photonenenergieen berechnen sich daher mit der Gleichung

$$E_p = hf = eU + W_A \tag{19}$$

und nehmen die Werte 2,4 eV, 2,6 eV, 2,75 eV

b) Die Lichtfrequenzen lassen sich aus $E_p = hf$ bestimmen und betragen 579 THz, 627 THz und 664 THz.

c) Die Wellenlängen lassen sich gemäß $\lambda = cf$ bestimmen und nehmen die Werte 518 nm, 478 nm und 452 nm an.

2.2 Photozelle

Blaues Licht der Wellenlänge $\lambda = 430nm$ falle auf eine Photozell, deren lichtelektrische Schicht eine Qunatenausbeute von $\eta = N_e/N_{ph} = 0.14$ (N_e: Zahl der ausgelösten e^-, N_{ph}: Zahl der eingestrahlten Photonen) aufweist.

a) Wie groß ist die Strahlungsleistung P des auf die Photozelle fallenden blauen Lichts, wenn ein maximaler Photoelektronenstrom von $I = 0.5mA$ gemessen wird?

b) Welche Elektronenaustrittsarbeit W_a hat das Material der lichtelektrischen Schickt, wenn durch ein Gegenfeld der Spannung $U \geq 0.94\ V$ der Photoelektronenstrom vollständig unterdrückt wird?

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Photoelektronen bei einer Gegenspannug von $U = 0V$

d) Für welche Wellenlänge tritt keine Photoelektronenstrom auf, wenn Sie annehmen, dass die lichtelektrische Schicht aus Cäsium besteht und die Elektronenaustrittsarbeit $W_a = 2.14\ eV$ beträgt?

Lösung:

a) Maximaler Photonenstrom bedeutet, dass die "Gegenspannung" so eingestellt wird, dass alle ausgeschlagenen Elektronen die Kathode erreichen.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad E = h\nu \qquad N_e = \eta N_{ph} \qquad N_e = \frac{\Delta Q}{e} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{N_{ph} \cdot E_{ph}}{\Delta t} = \frac{N_e E}{\eta \Delta t} = \frac{h\nu I}{\eta e} = \frac{hcI}{\eta e \lambda} && (21) \\ = \frac{1.24 \cdot 10^{-6} eVm \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} A}{0.14 \cdot e \cdot 430 \cdot 10^{-9} m} \approx 1 \cdot 10^{-2} W && (22) \end{aligned}$$

b) Vollständig unterdrückter Photostrom, bedeutet das selbst die schnellsten Elektronen, die Kathode gerade nicht mehr erreichen können. Wir können also die Energie, die die Elektronen durch das Gegenfeld in Richtung der Kathode verlieren gleich der Energie der Elektronen setzen.

$$E = eU = h\nu - W_A \tag{23}$$

$$W_A = \frac{hc}{\lambda} - eU = \frac{1.24 \cdot 10^{-6} eVm}{430 \cdot 10^{-9} m} - 0.94 eV \approx 1.94 eV \tag{24}$$

c) Die Ruheenergie der Elektronen beträgt 511keV, wir können also klassisch rechnen:

$$E = \frac{hc}{\lambda} - W_A = \frac{1}{2} m v^2 \tag{25}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - W_A\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{1.24 \cdot 10^{-6} eVm}{430 \cdot 10^{-9} m} - 1.94 eV\right)}{511 \cdot 10^3 eV / \left(3.0 \cdot 10^8 m\right)^2}} \approx 5.8 \cdot 10^5 m/s \tag{26}$$

d) Dafür muss die kinetische Energie der austretenden Elektronen genau 0 sein, oder die Strahlungsleistung nicht ausreichen, um die Atome zu ionisieren.

$$E = \frac{hc}{\lambda} - W_A \leq 0 \tag{27}$$

$$\lambda \geq \frac{hc}{W_A} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6} eVm}{2.14 eV} \approx 579 nm \tag{28}$$

3 Comptoneffekt

Ein Photon (γ-Quant) der Energie $E_{\gamma 0} = 1173keV$ wird an freien Elektronen gestreut.

a) Berechnen Sie die Wellenlänge des Photons. Hinweis: 1 eV ist die Energie, die ein Proton mit Ladung $q = +e = 16, \cdot 10^{-19} C$ erhält, wenn es eine Potentialdifferenz von U = 1 V durchläuft.

b) Wie groß ist die maximale Wellenlängenverschiebung und unter welchem Winkel θ tritt sie auf?

c) Welche kinetische Energie erhalten die Elektronen in diesem Fall?

Lösung:

a) Die Photonenenergie ist gegeben durch $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$.. Daraus ergibt sich für die gegebene Energie die Wellenlänge 1,06 pm.

b) Die Verschiebung der Wellenlänge in Abhängigkeit vom Streuwinkel berechnet sich durch

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \tag{29}$$

Die maximale Wellenlängenverschiebung erhält man für $\theta = 180^o$: 4,86 pm.

c) Die Energiedifferenz des Photons vor und nach der Streuung wird an das Elektron abgegeben:

$$E_{kin} = hf - hf' = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right) = 963keV$$

4 Schwarzkörperstrahlung

4.1 Rote Riesen

Rote Riesen haben typischerweise eine Oberächentemperatur von 3000 K. Berechnen Sie unter der Annahme, dass der Stern sich wie ein schwarzer Strahler verhält:

a) die gesamte emittierte Strahlungsleistung.

b) die Wellenlänge λ_{max} bei der das Strahlungsspektrum $P(\lambda, T)$ einen Peak aufweist.

c) den Anteil der Energie, der im sichtbaren Bereich des em Spektrums emittiert wird.

e) Warum gibt es rote und blaue aber keine grüne Sterne?

Lösung:

a) Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$R = \frac{P}{A} = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot (3000K)^4 = 4,59 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2} \tag{30}$$

Wobei A die Oberfläche des Sterns ist. Verwenden wir fur eine Abschätzung als Radius eines Roten Riesen eine astronomische Einheit AE (mittlere Entfernung Sonne-Erde), was in etwa der Ausdehnung der Sonne entsprechen wird, wenn sie dem Ende ihres Lebens naher kommt. $1AE = 15 \cdot 10^{10} m$. Als Gesamtleistung P erhalten wir somit ungefahr: $R \cdot 4\pi r^2 = 1,30 \cdot 10^{30} W$

b) maximale Wellenlänge über Wiensches Gesetz

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} Km}{3000K} = 967nm \tag{31}$$

c) Der Bruchteil der Strahlung im sichtbaren Licht sei

$$r = \frac{R_{Licht}}{R}$$

Die Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes über den sichtbaren Spektralbereich liefert den Wert fur R_{Licht}:

$$R_{licht} = \int_{300nm}^{700nm} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda \tag{32}$$

Im Nenner konnen wir die 1 weglassen, da:

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} Js \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{7 \cdot 10^{-7} m \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 3000K} = 6,8$$

da $e^{6,9} \approx 900 \gg 1 \Rightarrow e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}$

$$\Rightarrow R_{Licht} = \int_{300nm}^{700nm} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}} d\lambda$$

Substitution $\frac{hc}{\lambda k_B T} = x$ liefert

$$d\lambda = -\frac{hc}{k_B T x^2} dx$$

$$R_{Licht} = -2\pi \frac{k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_{12}^{7} \frac{x^3}{e^x} dx$$

Dieses Integral kann man mit folgender Formel losen:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}} \left[(ax)^n - n\,(ax)^{n-1} + n\,(n-1)\,(ax)^{n-2} + ... + (-1)n! \right], \quad n = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow R_{Licht} = -2\pi \frac{k_B^4 T^4}{h^3 c^2} e^{-x} \left[x^3 + 3x^2 + 6x + 6 \right]_{12}^{7} = 0,3339 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{R_{Licht}}{R} = 7,3\%$$

4.2 Oberflächentemperatur von Sonne und Erde

a) Außerhalb der Erdatmosphäre misst man das Maximum des Sonnenspektrums bei einer Wellenlänge von $\lambda = 465nm$. Bestimmen Sie daraus die Oberflächentemperatur der Sonne unter der Annahme, dass die Sonne ein schwarzer Körper ist.

b) Tatsächlich ist die Oberflächentemperatur der Sonne $T_s = 5700K$. Berechnen Sie nun die Oberflächentemperatur der Erde. Nehmen Sie dazu an, dass die Erdei ein schwarzer Körper im thermischen Gleichgewicht ist. Die Temperatur der Erdoberfläche werde Tag und Nacht gleich angenommen. Der Abstand Sonne-Erde ist $a = 150 \cdot 10^6 km$. Der Radius der Sonne ist $r_s = 6.96 \cdot 10^5 km$ und der der Erde $R = 6378km$

Lösung:

a) Wir verwenden das Wiensche Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2.898 \cdot 10^{-3} mK \tag{33}$$

$$T = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} mK}{\lambda_{max}} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} mK}{465 \cdot 10^{-9} m} \approx 6232K \tag{34}$$

b) Wir können die komplette Rechnung mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz durchführen. Die Intensität auf der Oberfläche ist

$$I_s = \sigma T^4 \tag{35}$$

(36)

Die Leistung der Sonne ist dann:

$$P = I_s \cdot A_{K_s} = \sigma T^4 \cdot 4\pi r_s^2 \tag{37}$$

Und damit die auf der Erde eintreffende Intensität:

$$I_{e_\alpha} = \frac{P}{A_{K_e}} = \frac{\sigma T^4 \cdot 4\pi r_s^2}{4\pi a^2} = \sigma T^4 \frac{r_s^2}{a^2} \tag{38}$$

Im Temperaturgleichgewicht gilt, dass die einfallende Leistung gleich der abgestrahlten Leistung ist:

$$P_\alpha = P_\epsilon \tag{39}$$

$$P_\alpha = I_{E_\alpha} \cdot r_e^2 \pi \tag{40}$$

$$P_\epsilon = I_{E_\epsilon} \cdot 4\pi r_e^2 \tag{41}$$

$$I_{E_\epsilon} = \sigma T_e^4 \tag{42}$$

Alles zusammen eingesetzt ergibt:

$$T_E = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2a}} = 5700K \sqrt{\frac{6.96 \cdot 10^5 m}{2 \cdot 150 \cdot 10^6 m}} \approx 275K \tag{43}$$