1 Aufgabe

Mit einem Refraktometer nach Pulfrich läßt sich mittels Messung des Grenzwinkels für Totalreflexion der unbekannte Brechungsindex n einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers bestimmen.

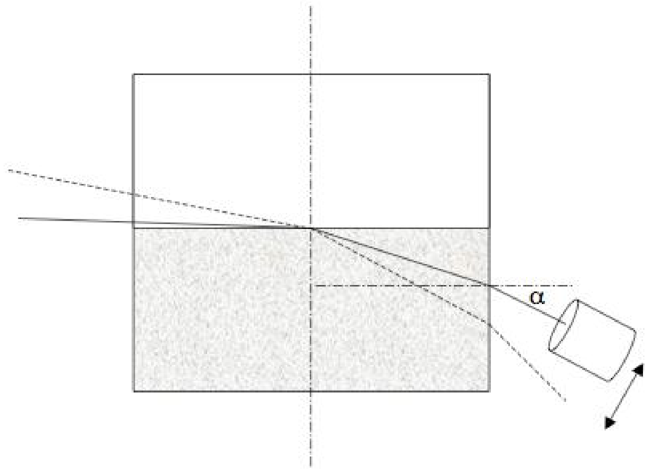

Abbildung 1: Aufgabe 1

Streifend auf die Grenzfläche zwischen Glaswürfel (Brechungsindex n_G) und Flüssigkeit eingestrahltes Licht, wird unter dem Grenzwinkel in das Glas hineingebrochen. Beim Austritt aus dem Glaswürfel in die Luft gelangt es unter dem Winkel β_B in das Fernrohr F. Zeigen Sie, daß für n gilt: $n = \sqrt{n_G^2 - \sin^2 \beta_B}$.
Hinweis: Ein Pulfrich-Refraktometer (nach Carl Pulfrich) besteht aus einem quaderförmigen Glaskörper mit bekannter Brechzahl n_G. An der Oberseite wird der Glasquader mit dem Prüfling in Kontakt gebracht. Die Grenzfläche wird mit leicht konvergentem Licht von der Seite beleuchtet.
Lösung:
Es gibt hier 2 Grenzflächen: Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Glas (Bezeichnung A, Einfallswinkel α_A, Brechungswinkel β_A), Grenzfläche zwischen Glas und Luft (Bezeichnung B, Winkel α_B, β_B). An den Grenzflächen tritt Brechung auf. Außerdem weisst man, dass der Lichtbündel leicht konvergiert und es gilt wegem dem Aufbau vom Experimenten: $\sin \alpha_A = \frac{n}{n_G}$ (Totalreflexion).
Grenzfläche B: $\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta_B} = \frac{1}{n_G}$
Es gilt aus den geometrische Überlegungen: $\alpha_B = 90^o - \beta_A$
$\Rightarrow \frac{\cos \beta_A}{\sin \beta_B} = \frac{1}{n_G} \Rightarrow \frac{\cos^2 \beta_A}{\sin \beta_B^2} = \frac{1}{n_G^2} \Rightarrow n = \sqrt{n_G^2 - \sin^2 \beta_B}$

2 Aufgabe

Überlegen Sie sich, wie ein dünner Wasserfilm auf einer Glasplatte den kritischen Winkel der Totalreflexion verändert. Die Brechzahlen sind 1,5 beim Glas und 1,33 beim Wasser.
a) Wie groß ist der kritische Winkel der Totalreflexion an der Glas-Wasser-Grenzfläche?
Lösung:
Totalreflexion: $\alpha_{Glas-Wasser} = 62,5^o$
b) Gibt es einen Bereich von Einfallswinkeln, die größer als der kritische Winkel θ_k der Totalreflexion an der Glas-Luft-Grenzfläche sind und bei denen Lichtstrahlen das Glas sowie das Wasser verlassen und in die Luft austreten?
Lösung:

Totalreflexion: $\theta_k = 41,8^o$
$\theta_{Wasser-Luft} = 48,75 \stackrel{!}{=} \theta_{Glas-Wasser}$
Wenn $\theta_k < \theta_{Glass-Wasser} < 48,75$ dann verlassen die Lichtstrahlen das Wasser.

3 Aufgabe

Eine Welle in der xy-Ebene werde beschrieben durch $z(x,y,t) = \cos(\omega t - k_x x - k_y y)$.
a) Bestimmen Sie die Fortpflanzungsrichtung und die Phasengeschwindigkeit der Welle.
Lösung:
Phase: $\omega t - k_x x - k_y y$. Orte gleicher Phase zur Zeit $t_0 = 0: \ -k_x x - k_y y = 0 \Rightarrow y = -\frac{k_x}{k_y} x$
Orte gleicher Phase zur Zeit $t = dt: \ \omega dt - k_x x - k_y y = 0 \Rightarrow y = -\frac{k_x}{k_y} x + \frac{\omega}{k_y} dt$
$x = 0: \ y_0 = \frac{\omega}{k_y} dt$
$y = 0: \ x_0 = \frac{\omega}{k_x} dt$

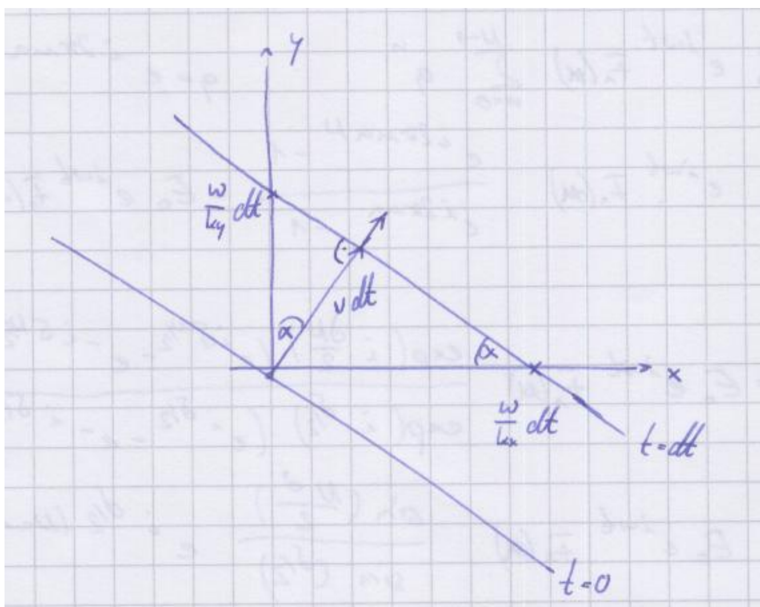

Abbildung 2: Aufgabe 3a)

$$\sin\alpha = \frac{v \cdot k_x}{\omega}, \quad \cos\alpha = \frac{v \cdot k_y}{\omega} \Rightarrow 1 = \left(\frac{v \cdot k_x}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{v \cdot k_y}{\omega}\right)^2 \Rightarrow v = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

$\stackrel{v=\frac{\omega}{k}}{\Rightarrow} k^2 = k_x^2 + k_y^2$

b) Die Welle wird an einer Wand y = const. reflektiert. Einlaufende und reflektierte Welle überlagern sich zu einer resultierenden Welle $s(x,y,t) = \cos(\omega t - k_x x - k_y y) + \cos(\omega t - k_x x + k_y y)$. Wie pflanzt sich diese Welle fort?
Lösung:
Trigonometrische Formel $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ benutzen. $s(x,y,t) = 2\underbrace{\cos(\omega t - k_x x)}_{laufend}\underbrace{\cos(k_y y)}_{stehend}$

4 Aufgabe

Zeigen Sie, ausgehend von der Stetigkeit der Tangentialkomponente von H an der Grenzfläche zweier Dielektrika, dass H bei der Reflexion einer senkrecht einfallenden elektromagnetischen Welle am dünnen Medium einen Phasensprung um π erleidet.
Lösung:
Stetigkeit der Tangentialkomponente von H bedeutet:
$H_e + H_r = H_t$
Da bei einer ebenen EM-Welle der Poynting-Vektor immer in Richtung des Wellenvektors zeigt, gilt:
$S_e - S_r = S_t$
$S = EH = \frac{\omega}{k}BH = vBH = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}BH = \frac{\sqrt{\mu\mu_0}}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0}}H^2 \overset{c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}}{=} \frac{1}{\epsilon_0 cn}H^2$
Damit folgt für den Betrag des Poyntings-Vektors$\Rightarrow \frac{H_e^2}{n} - \frac{H_r^2}{n} = \frac{H_t^2}{n_t}$
$\Rightarrow \frac{(H_e-H_r)(H_e+H_r)}{n} = \frac{H_t^2}{n_t} = \frac{(H_e+H_r)^2}{n_t} \Rightarrow \frac{(H_e-H_r)}{n} = \frac{(H_e+H_r)}{n_t} \Rightarrow \frac{H_r}{H_e} = \frac{n_t-n_e}{n_t+n_e}$
Aus den Fresnel Gleichungen folgt heraus, dass für Für $n_t > n_e$ (Refl. am dichteren Medium) gibt es keinen Phasensprung, aber für $n_t < n_e$ schon, und zwar um π, wegen $-1 = i^2 = e^{i\pi}$ (Vgl. Vorlesung: Fresnel-Gleichungen).

5 Aufgabe

a) Zeigen Sie, dass bei einer ebenen Welle Rechts- und Linkszirkularpolarisation aufeinander senkrecht stehen, d.h. dass das Amplitudenprodukt $\boldsymbol{E}_R \cdot \boldsymbol{E}_L^*$ Null ergibt.
Lösung:
Der Betrag von dem Vektor $\boldsymbol{E}$ ändert sich nicht bei einer zirkular polarisierten Welle. Die Komponenten $E_x,\ E_y$ sind in Phase (um 90^overschoben - vgl. Vorlesung). Bei einer rechts polarisierten Welle ist die Phasenverschiebung als $-\frac{\pi}{2}$ definiert, bei einer links polarisierten Welle als $\frac{\pi}{2}$. Rechts zirkular polarisiert heißt anschaulich, dass $\boldsymbol{E}$ eine Rechtsschraube dreht, wenn man in die Richtung der Quelle schaut. Also wir haben:
$\boldsymbol{E_R} = \boldsymbol{E}_x + \boldsymbol{E}_{yR} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_x e^{i(\omega t-kz)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_y e^{i\left(\omega t-kz-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_x e^{i(\omega t-kz)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_y \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i} e^{i(\omega t-kz)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_x - i\hat{\boldsymbol{e}}_y\right)e^{i(\omega t-kz)}$
$\boldsymbol{E_L} = \boldsymbol{E}_x + \boldsymbol{E}_{yL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_x + i\hat{\boldsymbol{e}}_y\right)e^{i(\omega t-kz)}$
$\boldsymbol{E_R} \cdot \boldsymbol{E_L^*} = \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_x - i\hat{\boldsymbol{e}}_y\right)\left(\hat{\boldsymbol{e}}_x - i\hat{\boldsymbol{e}}_y\right) = 0$
b) Wie lautet diejenige Welle, die zur elliptisch polarisierten Welle $\boldsymbol{E}_R = (\hat{\boldsymbol{e}}_x - ia\hat{\boldsymbol{e}}_y)e^{i(\omega t-kz)}/\sqrt{1+a^2}$ senkrecht polarisiert ist? Skizzieren Sie die Amplitudenprojektion in der x-y-Ebene.
Lösung:
$\boldsymbol{E}_L = (\hat{\boldsymbol{e}}_x + ib\hat{\boldsymbol{e}}_y)e^{i(\omega t-kz)}/\sqrt{1+b^2}$
Ansatz: $\boldsymbol{E_R} \cdot \boldsymbol{E_L^*} \overset{!}{=} 0 = \frac{(\hat{\boldsymbol{e}}_x - ia\hat{\boldsymbol{e}}_y)(\hat{\boldsymbol{e}}_x - ib\hat{\boldsymbol{e}}_y)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \Rightarrow 1 - ab \overset{!}{=} 0 \Rightarrow b = \frac{1}{a}$
$\boldsymbol{E}_L = (a\hat{\boldsymbol{e}}_x + i\hat{\boldsymbol{e}}_y)e^{i(\omega t-kz)}/\sqrt{1+a^2}$

6 Aufgabe

Ein Plättchen der Dicke d_x habe für $\hat{x}$-polarisierte Strahlung den Brechungsindex $n_x = 1 - \frac{a}{(\omega-\omega_0+\Delta)}$ und für $\hat{y}$-polarisierte Strahlung den Brechungsindex $n_y = 1 - \frac{a}{(\omega-\omega_0-\Delta)}$
a) Skizzieren Sie den Verlauf des Brechungsindex.
Lösung:

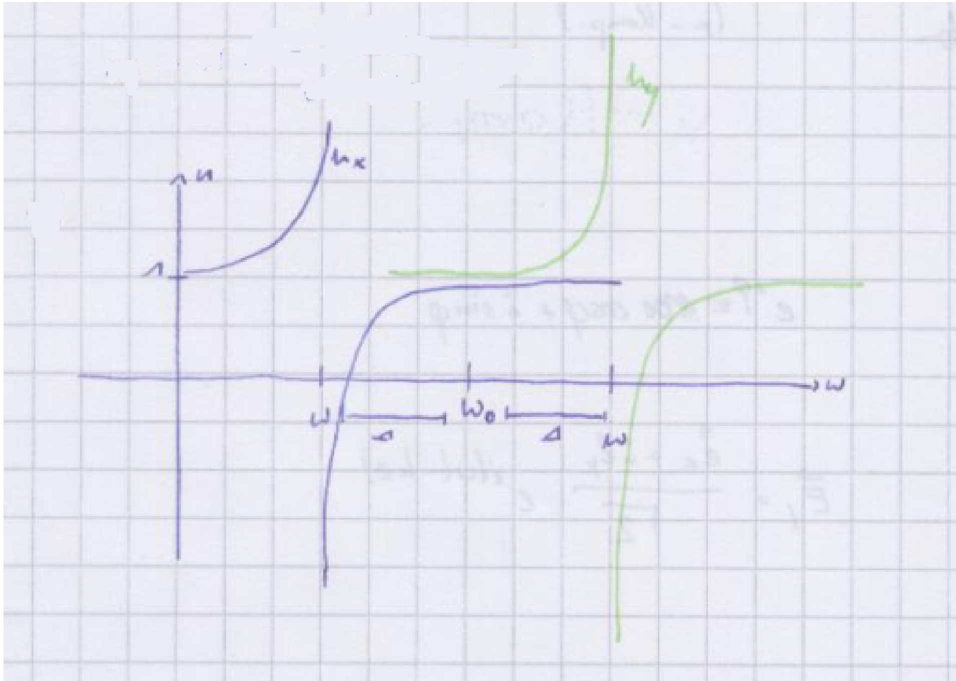

Abbildung 3: Aufgabe 6a)

b) Strahlung der Kreisfrequenz $\omega_0 + \delta$, die beim Einfall linear mit dem Winkel 45° zu den x- und y-Achsen polarisiert ist, verlässt die Platte nach senkrechtem Durchgang rechtszirkular (linkszirkular) polarisiert. Bestimmen Sie die möglichen Werte von δ und tragen Sie diese in die Skizze ein.

Lösung:

$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{e}}_x e^{i(\omega t - kn_x z)} + \hat{\boldsymbol{e}}_y e^{i(\omega t - kn_y z)} \Rightarrow \Delta\phi_{y-x} = -kn_x d - (-kn_y d) = kd\left(\frac{\alpha}{\omega-\omega_0+\Delta} - \frac{\alpha}{\omega-\omega_0-\Delta}\right) \overset{\omega=\omega_0+\delta}{=}$
$kd\left(\frac{\alpha}{\delta+\Delta} - \frac{\alpha}{\delta-\Delta}\right) = \frac{kd\alpha 2\Delta}{\delta^2+\Delta^2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n & \textit{rechtszirk.} \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n & \textit{linkszirk.} \end{cases}$
$\Rightarrow \delta = \pm\sqrt{\Delta^2 + \frac{\alpha 2\Delta}{(2n \mp 1/2)\pi}}$

7 Aufgabe

a) Licht der Intensitat $100\frac{W}{m^2}$ aus einer Halogenlampe falle auf einen idealen Linearpolarisator mit senkrechter Durchlassrichtung. Wie groß ist die Intensitat bei Austritt? Hinter den ersten Polarisator schaltet man nun einen weiteren Linearpolarisator mit horizontaler Durchlassrichtung. Wie groß ist die Intensitat nach dem zweiten Polarisator? Zum Schluss bringt man noch einen dritten Linearpolarisator zwischen die beiden ersten. Seine Durchlassrichtung ist um 45^o gedreht. Wie groß ist nun die Intensitat nach allen drei Polarisatoren? Erklaren Sie das auftretende Paradoxon.

Lösung:

Nach Durchgang durch eine Folie bleibt die Halfte der Intensitat uber, denn Licht kann ja immer in zwei senkrechte Komponenten aufgespalten werden. Also: $I_1 = 50W/m^2$. Dann hat man eine gekreuzte Anordnung: Es kommt gar keine Intensitat mehr durch. Führt man aber einen dritten Polarisator im Winkel von 45^o ein, erhalt man wieder Intensitat. Und zwar zunächst nach dem zweiten Filter: $I_1 = I_0 \cos^4 45^o = 25W/m^2$. Nach dem nachsten hat man wiederum eine Halbierung der Intensitat. Also: $I_1 = 12,5W/m^2$.

b) Wir leiten einen Lichtstrahl durch zwei gekreuzte perfekte Polarisationsfilter, zwischen denen sich ein dritter, ebenfalls perfekter Polarisationslter bendet, der mit der Kreisfrequenz ω rotiert. Zeigen Sie, dass der transmittierte Lichtstrahl mit der Frequenz 4ω moduliert ist. Wie verhalten sich Amplitude und Mittelwert der transmittierten zur einfallenden Flussdichte?

Lösung:

Der einfallende Lichtstrahl ist naturliches Licht und somit unpolarisiert. Daher erhalt man sofort, dass $I_1 = \frac{I_0}{2}$. Weiterhin wird $I_2 = I_1 \cos^2 \omega t$ und $I_3 = I_2 \cos^2 (90^o - \omega t)$ sein. Setzt man alles ein, so ergibt sich: $I_3 = \frac{I_0}{2} \cos^2 \omega t \cdot \sin^2 \omega t = \frac{I_0}{8} \cdot \sin^2 \omega t = \frac{I_0}{8} \cdot (1 - \cos^2 \omega t) = \frac{I_0}{16} \cdot (\cos 4\omega t)$. Für den Mittelwert ergibt sich: $\overline{I_3} = \frac{I_0}{16}$.

8 Aufgabe

Eine Lichtleitfaser hat einen Kerndurchmesser von $10\mu m$. Die Brechzahl des Kerns sei $n_1 = 1,60$, die des Mantels $n_2 = 1,59$. Wie klein ist der minimale Krümmungsradius der Faser, bei der die Totalreflexion für Strahlen in der Krümmungsebene noch erhalten bleibt?

Lösung:

$\sin \alpha = \frac{R-d/2}{R+d/2} \geq \sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1}$

$\Rightarrow R - \frac{d}{2} \geq \frac{n_2}{n_1} (R + d/2)$

$\Rightarrow R \geq \frac{d}{2} \frac{1+\frac{n_1}{n_2}}{1-\frac{n_1}{n_2}} = \frac{d}{2} \frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}$

$\Rightarrow R \geq 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3,1}{0,01} m = 1,5 mm$