Wellen und Dipolstrahlung

Florian Hrubesch

22. März 2010

1 Maxwellgleichungen

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen im Vakuum die Wellengleichung im Vakuum her. Zeigen Sie, dass E, B und k senkrecht aufeinander stehen.

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \tag{1}$$

Die Maxwellgleichungen im Vakuum lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3}$$

Wir wenden jetzt die Rotation auf 3 an:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)}_{= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \tag{5}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{6}$$

Dafür dass E, B und k senkrecht aufeinander stehen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{7}$$

Mit dem Ansatz für planare Ebene Wellen:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x \tag{8}$$

erhält man:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = E_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{e}_x\right) e^{i(kz-\omega t)} \tag{9}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = ikE_0 e^{i(kz-\omega t)} \vec{e}_y \tag{10}$$

$$\vec{B} = -ikE_0 \vec{e}_y \int e^{i(kz-\omega t)} = \frac{k}{\omega} E_0 \vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \tag{11}$$

E und B stehen also senkrecht aufeinander. Nun bleibt noch zu zeigen, dass es keine longitudinalen Elektromagnetischen Wellen gibt. Wir nehmen an:

$$\vec{E}\,(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{12}$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \qquad = dx \cdot E_x + dy \cdot E_y + dz \cdot E_z \tag{13}$$

Nachdem eine Ebene Welle in z-Richtung keine x- und y- Abhängigkeiten hat folgt also:

$$ikE_z e^{i(kz-\omega t)} = 0 \tag{14}$$

Damit hat das E-Feld keine z-Abhängigkeit und steht somit senkrecht auf $\vec{k}$

b) Eine ebene Lichtwelle mit der elektrischen Feldamplitude $E = 1\frac{MV}{m}$ falle senkrecht auf einen perfekten Spiegel. Berechnen Sie den Strahlungsdruck, der auf den Spiegel wirkt.

$$P = \frac{I}{c} = \frac{\epsilon_0 c_0 E^2}{c_0} = \epsilon_0 E^2 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm} \cdot (1 \cdot 10^6 \frac{V}{m})^2 = 8.8542 Pa \tag{15}$$

c) Die magnetische Induktion $\vec{B}$ sei als Ebene Welle vorgegeben:

$$\vec{B}\,(x,y,z,t) = B_0 \cos(kz-\omega t)\,\vec{e}_x + B_0 \cos(kz-\omega t)\,\vec{e}_y \tag{16}$$

Berechnen Sie die elektrische Feldstärke und deren Polarisation.

Wir verwenden wieder die Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{17}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = B_0 \left(\begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \vec{e}_x + \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \vec{e}_y \right) \cos\left(kz - \omega t\right) \tag{18}$$

$$= -B_0 k \left(\vec{e}_y - \vec{e}_x\right) \sin\left(kz - \omega t\right) \tag{19}$$

$$E = -B_0 k c^2 \left(\vec{e}_y - \vec{e}_x\right) \int dt \sin\left(kz - \omega t\right) \tag{20}$$

$$= \frac{B_0 k c^2}{\omega} \cos\left(kz - \omega t\right) \left(\vec{e}_y - \vec{e}_x\right) \tag{21}$$

$$= B_0 c \cos\left(kz - \omega t\right) \left(\vec{e}_y - \vec{e}_x\right) \tag{22}$$

d) Berechnen Sie damit den Poynting Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \frac{B_0^2 c}{\mu_0} \cos^2\left(kz - \omega t\right) \left(\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right) \times \left(\vec{e}_y - \vec{e}_x\right)\right) \tag{23}$$

$$= \frac{2 B_0^2 c}{\mu_0} \cos^2\left(kz - \omega t\right) \vec{e}_z \tag{24}$$

2 Absorption von Licht

Aus dem Oszillatormodell der Dispersion erhält man für verdünnte Gase die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten:

$$\epsilon_r\left(\omega\right) = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega} \tag{25}$$

Dabei ist N die Teilchendichte, ω die Resonanzfrequenz und γ die Dämpfungskonstante des Materials.

a) Leiten Sie aus dieser Formel den Realteil und den Imaginärteil des Brechungsindex her und skizzieren sie diese um die Resonanzfrequenz ω_0. Verwenden Sie hierzu die Näherung $\epsilon_r = 1 + \delta$ mit $|\delta| << 1$ und die Reihenentwicklung $(1 + x)^n = 1 + nx$.

Wir wissen das $n = \sqrt{\epsilon_r}$:

$$n = \sqrt{\epsilon_r} = (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta \tag{26}$$

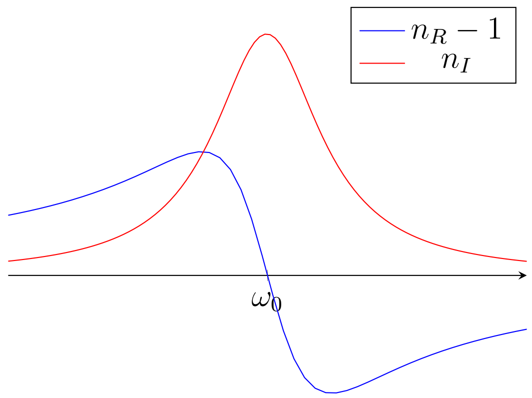
Und mit der Angabe:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{27}$$

Somit gilt für Realteil und Imaginärteil:

$$n_R = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{28}$$

$$n_I = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{29}$$



b) Betrachten Sie nun eine ebene Welle die sich in z-Richtung in einem verdünnten Gas mit Brechunsgindex $\tilde{n} = n + i\eta$ ausbreitet: $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cdot \exp i(kz - \omega t)$. Ersetzen Sie k mit Hilfe der Dispersionsrelation durch n und ω und bestimmen Sie die Intensität der Welle in Abhängigkeit von z.

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{n}\omega}{c_0} \tag{30}$$

$$\rightarrow \quad \vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cdot \exp i\left(\frac{n\omega}{c_0}z - \omega t\right) \tag{31}$$

$$= \vec{E}_0 \cdot \exp\left(-\frac{\eta\omega z}{c_0}\right) \cdot \exp\left(i\left(\frac{n\omega}{c_0}z - \omega t\right)\right) \tag{32}$$

$$\langle I \rangle = \epsilon_0 c_0 \left\langle E^2 \right\rangle \tag{33}$$

$$= \frac{\epsilon_0 c_0}{2} \cdot \exp\left(-\frac{2\eta\omega z}{c_0}\right) \tag{34}$$

c) Wie lautet der Beitrag $\epsilon(\omega)$ der von der Bewegung freier Elektronen im Metall herrührt?

Im Metall existieren keine Rückstellkräfte, also auch keine Resonanzfrequenzen.

$$\epsilon_r = 1 - \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}\frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} \tag{35}$$

3 Breite der Zone anomaler Dispersion

Finden Sie die Breite der Region anomaler Dispersion für eine einzige Resonanzfrequenz ω_0. Gehen Sie davon aus, dass $\gamma << \omega_0$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex seine Extremwerte genau an den Punkten der Halbwertsbreite des Absorptionskoeffizienten hat.

Wir beginnen mit:

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} = \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{D} \tag{36}$$

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\left(\frac{-2\omega}{D} - \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{D^2}\left(2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + \gamma^2 2\omega\right)\right) = 0 \tag{37}$$

$$\rightarrow\ 2\omega D = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - \gamma^2\right)2\omega \tag{38}$$

$$\tag{39}$$

Wir lösen nun nach ω auf.

$$\omega^2 = \omega_0^2 \mp \omega\gamma \tag{40}$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 \mp \frac{\gamma}{\omega_0}} \approx \omega_0\left(1 \mp \frac{\gamma}{2\omega_0}\right) = \omega_0 \mp \frac{\gamma}{2} \tag{41}$$

Und damit ist die Breite der anomalen Dispersion:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma \tag{42}$$

Für $alpha$ gilt:

$$\alpha = \frac{Nq^2\omega^2}{m\epsilon_0 c_0}\frac{\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{43}$$

Für das Maximum $\omega = \omega_0$ gilt also:

$$\alpha_{max} = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0 c_0\gamma} \tag{44}$$

Bei ω_1 und ω_2 gilt:

$$\alpha = \frac{Nq^2\omega^2}{m\epsilon_0 c_0}\frac{\gamma}{\gamma^2\omega_0^2+\gamma^2\omega^2} = \alpha_{max}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_0^2}\right) \tag{45}$$

Und zusätzlich gilt:

$$\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 \mp \omega_0\gamma}{2\omega_0^2 \mp \omega_0\gamma} = \frac{1}{2}\frac{1 \mp \frac{\gamma}{\omega_0}}{1 \mp \frac{\gamma}{2\omega_0}} \approx \frac{1}{2} \tag{46}$$

4 Reflektion an Kugel

Paralleles Licht der Intensität $I = 900\frac{W}{m^2}$ falle auf eine perfekt spiegelnde Metallkugel vom Durchmesser $d = 1m$. Berechnen Sie die Kraft auf die Kugel in Ausbreitungsrichtung des Lichts.

Zunächst Interessiert uns die Kraft auf die Kugel. Dazu betrachten wir einen Kreisstreifen mit dem Radius $a = R\sin\theta$ auf der Kugel. Dieser hat die Fläche:

$$dA = 2\pi a \cdot R \cdot d\theta \tag{47}$$

Wir benötigen die Fläche senkrecht zum Lichteinfall:

$$dA_z = dA\cos\theta = 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = \pi R^2 \sin(2\theta) \tag{48}$$

Für die durch das einfallende und das reflektierte Licht ausgeübte Kraft ergibt sich:

$$F_e = \frac{I}{c} dA_z \tag{49}$$

$$F_r = \frac{I}{c}\cos(2\theta)\, dA_z \tag{50}$$

Integration über die Halbkugel ergibt dann:

$$F_{ges} = \frac{I}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\theta))\, dA_z \tag{51}$$

$$= \pi R^2 \frac{I}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\theta))\sin(2\theta)\, d\theta \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

Der hintere Term fällt durch die Integration weg und so erhalten wir:

$$F_{ges} = \pi R^2 \cdot \frac{I}{c} \tag{54}$$

Die Kugel verhält sich also wie eine Kreisscheibe.

5 Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Amplitudenverteilungen im Frequenzraum:

a) $E\left(\omega\right)=E_0\delta\left(\omega-\omega_0\right)$

$$E\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega E_0\delta\left(\omega-\omega_0\right)e^{i\omega t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}E_0e^{i\omega_0 t} \tag{55}$$

b) $E\left(\omega\right)=E_0e^{-\alpha|\omega|}$

$$\begin{aligned} E\left(t\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega E_0e^{-\alpha|\omega|}e^{i\omega t} && (56)\\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty}d\omega e^{-\alpha\omega}e^{-i\omega t}+\int_0^{\infty}d\omega e^{-\alpha\omega}e^{i\omega t}\right) && (57)\\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\alpha+it}+\frac{1}{\alpha-it}\right) && (58)\\ &= \frac{2E_0\alpha}{\alpha^2+t^2} && (59) \end{aligned}$$

6 Wellengleichung und Intensitäten

Aus der Linearität der Wellengleichung folgt, dass jede Linearkombination der Wellenamplitude von Lösungen wieder eine Lösung ergibt. Gilt dies auch für die Intensitäten der Wellen? Gibt es Fälle, bei denen man die Intensitäten zweier Teilwellen addieren kann, um die Gesamtintensität zu bekommen?

Wir setzen das Elektrische Feld an:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ges} &= \vec{E}_1+\vec{E}_2 && (60)\\ I=\epsilon_0c_0\vec{E}^2 &= \epsilon_0c_0\left(\vec{E}_1^2+\vec{E}_2^2+2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\right) && (61) \end{aligned}$$

Wir setzen an:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_i\cos\left(\omega t+\phi_i\right) && (62)\\ \langle I\rangle &= \epsilon_0c_0\left\langle\vec{E}_{ges}^2\right\rangle=\frac{1}{2}\epsilon_0c_0\left(\vec{E}_1^2+\vec{E}_2^2+2\left|\vec{E}_1\right|\left|\vec{E}_2\right|\langle\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)\rangle\right) && (63)\\ &= \langle I_1\rangle+\langle I_2\rangle+2\sqrt{I_1I_2\langle\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)\rangle} && (64) \end{aligned}$$

Für nicht kohärentes Licht schwanken die Phasen ständig, und im Mittel gilt damit $\langle\phi_1-\phi_2\rangle=0$. Für kohärentes Licht gilt das allerdings nicht!

7 Lichtantrieb

Es gibt Pläne, Raumschiffe zu weit entfernten Himmelskörpern durch Photonenrückstoß auf hohe Geschwindigkeiten zu beschleunigen. Wie groß muss die Intensität des Lichtes einer ,,Lampe" mit 100 cm2 Fläche sein, die Licht aus dem Raumschiff nach ,,hinten" aussendet, damit eine Masse von 1000 kg eine Beschleunigung von $10^{-5}\frac{m}{s^2}$ erfährt?

Wir starten mit dem Strahlungsdruck:

$$P = \frac{I}{c} \tag{65}$$

Die Kraft ist entsprechend:

$$F = P \cdot A = I \cdot A = m \cdot a \tag{66}$$

Wir erhalten also die Intensität zu:

$$I = \frac{m \cdot c \cdot a}{A} \tag{67}$$

Einsezten ergibt:

$$I = 3 \cdot 10^8 \frac{W}{m^2} \tag{68}$$

8 Brechungsindex bei schwacher Dämpfung

Zeigen Sie, dass man für $\omega - \omega_0 >> \gamma$ den Brechungsindex schreiben kann als

$$n - 1 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \tag{69}$$

Wir starten mit:

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{70}$$

$$\approx \frac{a_1}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{71}$$

$$= \frac{\frac{a_1}{4\pi c_0^2}}{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{a_2}{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{a_2\lambda_0^2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \tag{72}$$

$$= a_2\lambda_0^2 + \frac{a_2\lambda_0^4}{\lambda^2 - \lambda_0^2} = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \tag{73}$$

9 Gruppen und Phasengeschwindigkeit

a) Seichtes Wasser ist Nichtdispersiv. Die Wellen haben eine Phasengeschwindigkeit die proportional zur Wurzel der Tiefe des Wassers ist. In tiefen Wasser verhalten sie sich allerdings so, als ob die Tiefe Proportional zur Wellenlänge λ wäre. Zeigen Sie, dass die Phasengeschwindigkeit in tiefen Wasser doppelt so groß wie die Gruppengeschwindigkeit ist.

Die Phasengeschwindigkeit ist proportional zur Wurzel aus der Wellenlänge $v_{ph} = \alpha\sqrt{\lambda}$. Es gilt $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ und $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$:

$$\omega = \alpha k \sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \alpha\sqrt{2\pi k} \tag{74}$$

Für die Gruppengeschwindigkeit gilt:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \alpha\sqrt{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2}v_{ph} \tag{75}$$

b) In der Quantenmechanik wird ein freies Teilchen der Masse m das sich in x-Richtung ausbreitet durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(px-Et)/\hbar} \tag{76}$$

beschrieben. Dabei ist p der Impuls und $E = \frac{p^2}{2m}$ die kinetische Energie des Teilchens. Berechnen Sie die Gruppen und die Phasengeschwindigkeit des Teilchens. Welche davon entspricht der tatsächlichen Teilchengeschwindigkeit?

$$\frac{i(px-Et)}{\hbar} = i(kx-\omega t) \tag{77}$$

$$\rightarrow k = \frac{p}{\hbar} \tag{78}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{79}$$

Und damit folgt für die Gruppen und die Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{\hbar k}{2m} \tag{80}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\hbar k}{2m} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} \tag{81}$$

$$\rightarrow v_{ph} = \frac{1}{2}v_g \tag{82}$$

Die Teilchengeschwindigkeit entspricht also der Gruppengeschwindigkeit.