

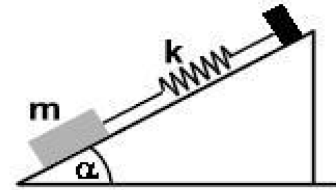
# FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 1

## 2010

### Übung 5 - Musterlösung

#### 1. Feder auf schiefer Ebene (\*\*)

Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel  $\alpha = 20^\circ$  befindet sich ein Körper der Masse  $m = 1 \text{ kg}$ . An dem Körper ist ein masseloser starrer Draht befestigt, der den Körper mit einer Feder der Federkonstanten  $D$  verbindet, die ihrerseits an der Spitze der schiefen Ebene befestigt ist.



- Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$ . Vernachlässigen Sie hierbei die Reibung.
- Welche Federstärke  $D$  muss die Feder besitzen, damit die Masse mit einer Frequenz  $\nu = 10 \text{ Hz}$  schwingt?
- Welchen Einfluss hat der Neigungswinkel  $\alpha$  auf das System?

#### Lösung:

- Würde der Neigungswinkel  $\alpha = 90^\circ$  betragen, so hätten wir es mit einem ganz normalen Federpendel zu tun. Da aber in Aufgabenteil c) explizit nach der  $\alpha$ -Abhängigkeit gefragt ist, werden wir diese gleich in der Bewegungsgleichung berücksichtigen.

Wählen wir die positive  $x$ -Richtung so, dass sie die schiefe Ebene herab zeigt, so ergibt sich bei einer Auslenkung der Feder um  $x$  aus der Ruhelage  $x_0$  für die resultierende Kraft  $F = F_{\text{Hang}} - F_{\text{Feder}}$ , also

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - Dx \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = g \sin \alpha \text{ mit } \omega = \sqrt{D/m}.$$

Die Lösung der homogenen DGL ist die bekannte Schwingungsfunktion

$$x_h(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Da die Inhomogenität hier nur eine Konstante ist, wählen wir als Ansatz ebenfalls eine konstante Funktion  $x_p(t) = C$ . Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$x_p(t) = \frac{g \sin \alpha}{\omega^2} = x_0.$$

Die totale Lösung lautet somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{g \sin \alpha}{\omega^2}.$$

Mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$  erhält man für die Koeffizienten

$$A = \frac{v_0}{\omega}$$
$$B = 0.$$

Man erhält also insgesamt

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0.}}$$

b) Es gilt

$$\omega^2 = (2\pi\nu)^2 = D/m \Rightarrow \underline{\underline{D = m(2\pi\nu)^2 = 4 \text{ kN/m.}}}$$

c) Die Eigenfrequenz  $\omega$  hängt nicht vom Winkel  $\alpha$  ab. Die Ruhelage

$$x_0 = \frac{g \sin \alpha}{\omega^2}$$

allerdings schon.

## 2. Gedämpftes Masse-Feder Pendel (\*)

Betrachten Sie ein gedämpftes Masse-Feder Pendel, dass der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$$

genügt, wobei  $m$  die Masse sei,  $r$  die Dämpfungskonstante und  $s$  die Federkonstante. Für  $s = r^2/(4m)$  ist die allgemeine Lösung gegeben als

$$x(t) = (C + Dt)e^{-pt},$$

wobei  $C$  und  $D$  Konstanten sind.

a) Bestimmen Sie  $p$ .

b) Ein Eisenbahnpuffer am Ende des Gleises in einem Kopfbahnhof verhalte sich wie ein solches gedämpftes Masse-Feder Pendel aus Aufgabe a). Die Federkonstante sei gegeben als  $s = 11.25 \text{ kN/m}$  und Dämpfungskonstante als  $r = 30 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$ . Ein Eisenbahnwagen der Masse  $m = 20 \cdot 10^3 \text{ kg}$  kollidiere mit diesem Puffer mit einer Geschwindigkeit  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ . Überlegen Sie sich die Anfangsbedingungen und bestimmen Sie daraus die Konstanten  $C$  und  $D$ . Zeigen Sie, dass dieses Sys-

tem kritisch gedämpft ist. Wie weit wird der Puffer maximal zusammengedrückt? Welche Geschwindigkeit besitzt der Wagen nachdem er vom Puffer zurückgestoßen wurde?

**Lösung:**

- a) Da es sich hier offensichtlich um den aperiodischen Grenzfall handelt, wird die gegebene Bewegungsgleichung mit dem Ansatz  $x(t) = Ce^{-pt}$  gelöst und führt auf die charakteristische Gleichung für  $p$

$$p^2 - \frac{r}{m}p + \frac{s}{m} = 0$$

mit den Lösungen

$$p_{1,2} = \frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}.$$

Nur für  $s = r^2/(4m)$  (vgl. Angabe) ist  $x(t) = (C + Dt)e^{-pt}$  eine allgemeine Lösung der DGL. Also gilt

$$\underline{\underline{p = r/(2m)}}.$$

Bemerkung: Einsetzen der allgemeinen Lösung in die DGL führt noch zu einem zeitabhängigen  $p$ , welches für die Lösung aber irrelevant ist.

- b) Das System ist kritisch gedämpft, da  $s = r^2/(4m)$ , was durch Einsetzen der gegebenen Werte leicht überprüft werden kann. Die gegebene allgemeine Lösung darf also verwendet werden. Mit den sich aus der Situation ergebenden Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$  erhält man für die Konstanten  $C = 0$  und  $D = v_0$ . Man erhält somit

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t e^{-\frac{r}{2m}t} \\ \dot{x}(t) &= \left(1 - \frac{r}{2m}t\right) v_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \\ \ddot{x}(t) &= \left(\frac{r}{2m}t - 2\right) v_0 \frac{r}{2m} e^{-\frac{r}{2m}t}. \end{aligned}$$

Bei maximaler Auslenkung des Puffers ist  $\dot{x}(t) = 0$ . Somit gilt für  $t = 2m/r$

$$\underline{\underline{x(t = 2m/r) = v_0 \frac{2m}{r} e^{-1} = \frac{4}{3e} \text{ m} = 0.49 \text{ m.}}}$$

Da der Puffer am Wagen nun anliegt, kann er beim Zurückschwingen nur beschleunigt und nicht abgebremst werden. Der Wagen rollt mit der maximalen negative Geschwindigkeit weg. Diese ergibt sich zu dem Zeitpunkt bei dem  $\ddot{x}(t) = 0$  ist, also für  $t = 4m/r = 8/3$  s. Die Geschwindigkeit beträgt dann

$$\underline{\underline{\dot{x}(t = 4m/r) = -v_0 e^{-2} = -e^{-2} \text{ m/s} = -0.14 \text{ m/s.}}}$$

### 3. Palme im Wind (\*\*)

Eine hohe Palme mit einer 1 Tonne schweren, kompakten Krone bewegt sich im Wind. Für ein Paar Minuten übt ein konstanter Wind eine horizontale Kraft von 1000 N auf die Krone aus. Diese wird dadurch um 4 m zur Seite ausgelenkt. Bei plötzlich eintretender Windstille führt die Krone eine gedämpfte harmonische Schwingung aus. Dabei ist die Maximalamplitude der ersten Schwingung 4 m, die der zweiten 3 m und die der dritten 2.25 m.

- Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante der Schwingung.
- Welchen Wert hat die Kreisfrequenz der Schwingung?

#### Lösung:

- Die Palme wird durch eine Kraft  $F = 1000$  N um  $x = 4$  m ausgelenkt. Damit ergibt sich die Federkonstante  $D$  der Palme zu

$$D = \frac{F}{x} = 250 \text{ N/m.}$$

Für die Kreisfrequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung gilt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 0.5 \text{ Hz.}$$

Mit der Definition des logarithmischen Dekrements findet man einen Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstante  $\gamma$ , der Periodendauer  $T$  und den angegebenen Maximalamplituden. Es ergibt sich

$$\gamma T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{4}{3}.$$

Aus der Vorlesung ist für den Fall der gedämpften Schwingung

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

bekannt. Für die Periodenlänge gilt somit

$$T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\gamma T)^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\ln 4/3)^2}{\omega_0^2}} = 12.58 \text{ s.}$$

Für die Dämpfungskonstante erhält man damit

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{\ln 4/3}{T} = 0.023 \text{ s}^{-1}.}}$$

b) Für die Kreisfrequenz folgt dann

$$\underline{\underline{\omega = \frac{2\pi}{T} = 0.499 \text{ Hz.}}}$$

#### 4. Schwingung mit resonantem Antrieb (\*\*)

Die ungedämpfte harmonische Schwingung mit resonantem Antrieb ( $\omega_0 = \Omega$ )

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = f_0 \cos(\Omega t)$$

besitzt die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \frac{f_0}{2\Omega} t \sin(\Omega t).$$

- Zeigen Sie, dass  $x_p(t)$  die Schwingungsgleichung löst.
- Berechnen Sie für diese Lösung die Oszillator-Energie. Diese Energie enthält einen anwachsenden und einen oszillierenden Anteil. Zeigen Sie, dass die Energie quadratisch mit der Zeit anwächst, wenn man die oszillierenden Anteile über eine Periode mittelt.
- Wie lautet die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung? Konstruieren Sie eine spezielle Lösung für die Anfangsbedingung  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ .

#### Lösung:

- Zweimaliges Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= \frac{f_0}{2\Omega} \sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2} t \cos(\Omega t) \\ \ddot{x}_p(t) &= f_0 \cos(\Omega t) - \frac{f_0 \Omega}{2} t \sin(\Omega t).\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Schwingungsgleichung erhält man

$$\underline{\underline{\ddot{x}_p(t) + \Omega^2 x_p(t) = f_0 \cos(\Omega t) - \frac{f_0 \Omega}{2} t \sin(\Omega t) + \Omega^2 \frac{f_0}{2\Omega} t \sin(\Omega t) = f_0 \cos(\Omega t).}}$$

$x(t)$  ist also Lösung der Schwingungsgleichung.

b) Die Oszillator-Energie lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
 E &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \\
 &= \frac{m}{2}(\dot{x} + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{f_0}{2\Omega} \sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2} t \cos(\Omega t) \right)^2 + \omega^2 \left( \frac{f_0}{2\Omega} t \sin(\Omega t) \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{m f_0^2}{8\Omega^2} (\sin^2(\Omega t) + 2\Omega t \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) + \Omega^2 t^2 \sin^2(\Omega t) + \Omega^2 t^2 \cos^2(\Omega t)) = \\
 &= \frac{m f_0^2}{8\Omega^2} (\sin^2(\Omega t) + 2\Omega t \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) + \Omega^2 t^2).
 \end{aligned}$$

Es ist also ein quadratisches Anwachsen überlagert mit oszillierenden Anteilen. Mittelt man die oszillierenden Anteile über eine Periode  $T$ , so erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_0^T dt \, 2t \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) &= \int_0^T dt \, t \sin(2\Omega t) = \left[ \frac{\sin(2\Omega t)}{4\Omega^2} - \frac{t \cos(2\Omega t)}{2\Omega} \right]_0^T = -\frac{T}{2\Omega} \\
 \int_0^T dt \, \sin^2(\Omega t) &= \frac{T}{2}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\underline{\underline{\overline{E(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, E(t) = \frac{1}{T} \frac{m f_0^2}{8\Omega^2} \left( \frac{T}{2} - \Omega \frac{T}{2\Omega} + \Omega^2 t^2 \right) = \frac{m f_0^2}{8T} t^2.}}$$

Bemerkung: In obiger Formel wurden nur die oszillierenden Anteile über eine Periode gemittelt.

c) Die Lösung der homogenen DGL lautet bekanntlich  $x_h(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$ . Mit der angegebenen partikulären Lösung lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2\Omega} t \sin(\Omega t).$$

Aus den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$  folgt  $A = 0$  und  $B = v_0/\Omega$ . Man erhält letztendlich für die spezielle Lösung

$$\underline{\underline{x(t) = \left( \frac{v_0}{\Omega} + \frac{f_0}{2\Omega} t \right) \sin(\Omega t).}}$$

## 5. Baufahrzeug (\*\*\*)

Beim Anfahren eines Baufahrzeugs führt der Fußboden des Cockpits vertikale Schwingungen mit zunehmender Frequenz aus. Für ein Messgerät mit Masse  $m = 100$  g, das hohe Schwingungsfrequenzen nicht verträgt, beträgt die kritische Kreisfrequenz 200 Hz. Das Gerät ist federnd und gedämpft gelagert, wobei die Feder so ausgewählt ist, dass die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  für Messgerät und Feder 10% von  $\omega_{\text{krit}}$  beträgt.

- Wie groß ist die Federkonstante  $k$  der Aufhängung des Messinstruments?
- Welchen Wert muss die Abklingkonstante  $\gamma$  haben, damit die Schwingungsamplitude  $A_m$  des Messgerätes bei  $\omega_0$  gerade so groß wie die Amplitude  $\xi_m$  der Erreger-schwingung ist?
- Bei welcher Kreisfrequenz  $\Omega_m$  ist das Amplitudenverhältnis  $A_m/\xi_m$  am größten, wenn die Abklingkonstante  $\gamma$  den in b) berechneten Wert hat?
- Welchen Wert hat  $A_m/\xi_m$  bei  $\Omega_m$  und bei  $\omega_{\text{krit}}$ ?

### Lösung:

- Da das Messgerät die Frequenz  $\omega_{\text{krit}}$  nicht verträgt, wählt man die Federkonstante so, dass deren Eigenfrequenz  $\omega_0$  ganz verschieden ist von der kritischen Frequenz  $\omega_{\text{krit}}$ , laut Angabe also  $\omega_0 = 0.1 \cdot \omega_{\text{krit}}$ . Es folgt

$$\underline{\underline{k = m\omega_0^2 = \frac{m\omega_{\text{krit}}}{100} = 40 \text{ N/m.}}}$$

- Wahl der Dämpfungskonstante so, dass bei der Schwingung des Bodens

$$\xi(t) = \xi_m \cos(\Omega t)$$

bei  $\Omega = \omega_0$  die Amplitude  $A_m$  der Schwingung des Messgerätes

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

gerade so groß ist wie die Bodenamplitude  $\xi_m$ . Die Schwingung des Bodens  $\xi(t)$  führt zu einer Stauchung und Dehnung der Feder und somit zu einer Kraft auf das Messgerät, welche durch  $F(t) = k\xi(t)$  gegeben ist.

Diese kann als äußere Antriebsfrequenz des Feder-Messgerät-Systems angesehen werden. Die DGL des Feder-Messgerät-Systems ist dann durch

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = k\xi(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

bzw.

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \xi(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) = \omega_0^2 \xi_m \cos(\Omega t)$$

mit  $2\gamma = b/m$  und  $\omega_0^2 = k/m$  gegeben.

Die Lösung dieser DGL ist laut Vorlesung  $x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$  mit

$$A_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}.$$

Für das Amplitudenverhältnis folgt somit

$$\frac{A_m}{\xi_m} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}.$$

Mit der Bedingung aus der Angabe

$$\left. \frac{A_m}{\xi_m} \right|_{\omega_0 = \Omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \stackrel{!}{=} 1$$

erhält man für die Dämpfungskonstante

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{\omega_0}{2} = 10 \text{ s}^{-1}}}.$$

c) Die Bestimmung des Maximums des Ausdrucks

$$\frac{A_m}{\xi_m}(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

ist aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion äquivalent zur Bestimmung des Minimums von

$$R(\Omega) = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2.$$

Man erhält mit  $\gamma = \omega_0/2$  aus b)

$$\left. \frac{dR(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega = \Omega_m} = 4\Omega_m(2\gamma^2 - \omega_0^2 - \Omega_m^2) = 4\Omega_m \left( \frac{\omega_0^2}{2} - \Omega_m^2 \right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Die relevante Lösung ist  $\Omega_m^2 = \omega_0^2/2$ .

d) Man erhält mit den Ergebnissen aus b) und c) für die Amplitudenverhältnisse

$$\underline{\underline{\frac{A_m}{\xi_m}(\Omega = \Omega_m) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 + \left(2\frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 \frac{\omega_0^2}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15}}$$

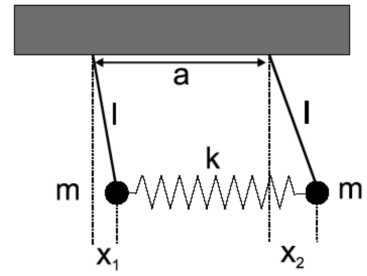
$$\underline{\underline{\frac{A_m}{\xi_m}(\Omega = \omega_{\text{krit}}) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - (10\omega_0)^2)^2 + \left(2\frac{\omega_0}{2}\right)^2 (10\omega_0)^2}} = \frac{1}{10\sqrt{82}} = 0.01}}}.$$

Das Messgerät bleibt also bei der kritischen Frequenz unversehrt.



## 6. Gekoppelte Fadenpendel (\*\*)

Zwei Fadenpendel der Länge  $l$  (Massen  $m$ ) sind durch eine Feder (Federkonstante  $k$ ) so miteinander verbunden (siehe Skizze), dass die Feder im ruhenden System nicht ausgelenkt ist.



- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen der beiden Pendel. Vernachlässigen Sie hierbei die Reibung.
- Bestimmen Sie die Kreisfrequenzen der beiden möglichen Normalschwingungen, d.h. der gleichphasigen Schwingung,  $x_1(t) = x_2(t)$ , sowie der gegenphasigen Schwingung,  $x_1(t) = -x_2(t)$ .
- Für eine sehr schwache Kopplung ( $k \ll mg/l$ ) ergeben sich aus der Überlagerung der beiden Normalschwingungen Schwebungen. Berechnen Sie für diesen Fall die Schwebungskreisfrequenz.

Hinweise:  $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ,  $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$  und  $(1+x)^n \simeq 1+nx$  für  $|x| \ll 1$ .

### Lösung:

- Die Rückstellkraft der Fadenpendel für kleine Auslenkungen ist gegeben durch

$$F_{r_{1,2}} = -m \frac{g}{l} x_{1,2}$$

und die Kopplung der Pendel ist gegeben durch

$$F_{k_{1,2}} = -k(x_{1,2} - x_{2,1}).$$

Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 = -m \frac{g}{l} x_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -m \frac{g}{l} x_2 - k(x_2 - x_1).$$

- Mit dem Ansatz  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  finden wir für
  - die gleichphasige Schwingung  $x_1 = x_2$ , bei der die Kopplung nicht beansprucht wird

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{l} x_1 \Rightarrow \underline{\underline{\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}}}$$

– die gegenphasige Schwingung  $x_1 = -x_2$

$$\ddot{x}_1 = - \left( \frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \right) x_1 \Rightarrow \underline{\underline{\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m}}}}$$

c) Die allgemeine Lösung ist die Linearkombination der beiden Normalschwingungen

$$x_{1,2}(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \pm A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

Der deutlichste Schwebungseffekt tritt für den Spezialfall  $A_+ = A_- = A$  auf. Mit den gegebenen Additionstheoremen findet man

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2A \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right) \\ x_2(t) &= -2A \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Schwebungsfrequenz ist die kleinere der beiden Kreisfrequenzen, also

$$\omega_s = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m}} - \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

Für den Fall schwacher Kopplung erhält man damit in erster Näherung

$$\underline{\underline{\omega_s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left( \sqrt{1 + 2 \frac{k l}{m g}} - 1 \right) \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{k l}{m g} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{k/m}{\sqrt{g/l}}}}}$$

## 7. Seilwelle (\*)

Die Wellenfunktion einer harmonischen Welle auf einem Seil sei gegeben durch

$$y(x, t) = 0.001 \text{ m} \cdot \cos(62.8 \text{ m}^{-1} \cdot x + 314 \text{ s}^{-1} \cdot t).$$

- In welche Richtung bewegt sich die Welle, und wie groß ist ihre Geschwindigkeit?
- Ermitteln Sie Wellenlänge, Frequenz und Schwingungsdauer der Welle.
- Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit eines Seilsegments?
- Berechnen Sie die Spannung in einem 400 g schweren Seil der Länge 1 m.  
Hinweis:  $v_{\text{ph}} = \sqrt{F/\mu}$ , wobei  $\mu$  die lineare Massendichte ist.

**Lösung:**

- a) Die Welle bewegt sich nach links, da das Argument der Kosinus-Funktion

$$kx + \omega t = k \left( x + \frac{\omega}{k} t \right)$$

nach links wandert: Zur Zeit  $t = 0$  ist sein Nullpunkt bei  $x = 0$ , zur Zeit  $t > 0$  ist er bei

$$x = -\frac{\omega}{k} t < 0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man auch die Geschwindigkeit

$$\underline{\underline{v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = 5 \text{ m/s.}}}$$

- b) Die Wellenlänge beträgt

$$\underline{\underline{\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.1 \text{ m,}}}$$

die Frequenz

$$\underline{\underline{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}}}$$

und die Schwingungsdauer

$$\underline{\underline{T = \frac{1}{\nu} = 0.02 \text{ s.}}}$$

- c) Wir setzen uns an einen festen Punkt, d.h. halten
- $x$
- konstant und leiten nach
- $t$
- ab

$$\dot{y}(x, t) = -A\omega \sin(kx + \omega t).$$

Die Amplitude der Geschwindigkeit des Seilelements am festgehaltenen Ort  $x$  ist also  $A\omega$  (unabhängig von  $x$ ) und hat den Wert

$$\underline{\underline{A\omega = 0.314 \text{ m/s.}}}$$

- d) Aus der Phasengeschwindigkeit der Welle

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{m/l}}$$

erhält man für die Seilspannung

$$\underline{\underline{F = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{m}{l} = 10 \text{ N}}}$$

### 8. Longitudinale Schwingung einer Schraubenfeder (\*)

Eine homogene Schraubenfeder der Länge  $l = 0.6$  m, der Gesamtmasse  $m_0 = 150$  g und der Federkonstante  $D = 12$  N/m ist am oberen Ende aufgehängt und schwingt frei.

- Welche Randbedingungen (Schwingungsknoten oder Schwingungsbauch) gelten an den Federenden bei den longitudinalen Eigenschwingungen der Feder?
- Als Schwingungsgleichung ergibt sich für eine solche Feder

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{m_0}{Dl^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Wie groß ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  für Longitudinalwellen in der Feder?

- Berechnen Sie für die Grundschiwingung die Eigenfrequenz  $\nu_0$  der Feder.
- Welche Effektivmasse  $m_{\text{eff}}$  kann man der Feder zuschreiben? Dabei soll ein Körper der Masse  $m_{\text{eff}}$  am unteren Ende der als masselos gedachten Feder hängen und mit der Frequenz  $\nu_0$  schwingen.

#### Lösung:

- Am oberen Federende (fest) muss sich ein Schwingungsknoten befinden, am unteren Federende (frei) ein Schwingungsbauch.
- Ein Vergleich mit der allgemeinen Schwingungsgleichung führt auf

$$\underline{\underline{c = \sqrt{\frac{Dl^2}{m_0}} = 5.37 \text{ m/s.}}}$$

- Für die Eigenfrequenz der Grundschiwingung erhält man mit  $\lambda_0 = 4l$  aus der Vorlesung

$$\underline{\underline{\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{4l} = 2.24 \text{ Hz.}}}$$

- Setzt man die allgemeine Formel für die Eigenfrequenz einer harmonischen Schwingung an so ergibt sich

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m_{\text{eff}}}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D}{m_0}} \Rightarrow \underline{\underline{m_{\text{eff}} = \frac{4}{\pi^2} m_0 = 60.8 \text{ g.}}}$$

### 9. Überlagerung zweier Schallwellen(\*)

Die ebene Schallwelle  $\xi_1 = A \cos(800 \text{ s}^{-1} \cdot t - 2 \text{ m}^{-1} \cdot z)$  wird mit der ebenen Schallwelle  $\xi_2 = A \cos(630 \text{ s}^{-1} \cdot t - 1.5 \text{ m}^{-1} \cdot z)$  überlagert. Wie sieht ihre Überlagerung aus und wie groß ist ihre Gruppengeschwindigkeit im Vergleich zu den Phasengeschwindigkeiten der beiden Einzelwellen?

#### Lösung:

Für die Überlagerung erhält man

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z) = \\ &= \underline{\underline{2A \cos(85 \text{ s}^{-1} \cdot t - 0.25 \text{ m}^{-1} \cdot z) \cos(715 \text{ s}^{-1} \cdot t - 1.75 \text{ m}^{-1} \cdot z)}}.\end{aligned}$$

Die Phasengeschwindigkeiten der Einzelwellen sind

$$v_{\text{ph}_1} = \frac{\omega_1}{k_1} = 400 \text{ m/s}$$

$$\underline{\underline{v_{\text{ph}_2} = \frac{\omega_2}{k_2} = 420 \text{ m/s.}}}$$

Die Gruppengeschwindigkeit beträgt

$$\underline{\underline{v_{\text{gr}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = 340 \text{ m/s.}}}$$

### 10. Ruhestörung (\*)

Ein Lautsprecher steht vor einer reflektierenden Wand und sendet einen Ton mit der Frequenz 160 Hz (Schallgeschwindigkeit in Luft:  $v_L = 330 \text{ m/s}$ ) aus. Wo muss Hans seine drei Omas und den Lautsprecher positionieren, damit die alten Damen nicht vom Lärm belästigt werden und er aber überall zwischen den Omas das Geräusch hören will, wenn er ihnen beim Stricken zusieht?

#### Lösung:

Die Schallwelle vom Lautsprecher (freies Ende) wird an der Wand (festes Ende) reflektiert und interferiert mit sich selbst. Da sich an der Wand ein Knoten befinden muss, ist die Amplitude für einen Abstand von

$$\underline{\underline{\Delta x_n = n\lambda/2 = \frac{n v_L}{2 \nu} = n \cdot 1.03 \text{ m}}}$$

von der Wand immer Null.

Die Omas müssen also bei  $\Delta x_1 = 1.03$  m,  $\Delta x_2 = 2.06$  m und  $\Delta x_3 = 3.09$  m platziert werden. Da sich der Lautsprecher an einem freien Ende befindet, also dort ein Bauch auftritt, muss dieser eine Viertel Wellenlänge von einem Knoten entfernt platziert werden, z.B. 3.61 m von der Wand entfernt.

### 11. Dopplereffekt bei einer Dampflokomotive (\*\*)

Eine Dampflokomotive besitzt eine beidseitig offene Dampfpeife von  $l = 12.5$  cm Länge, die mit Wasserdampf angeblasen wird (Schallgeschwindigkeit in Luft:  $v_L = 330$  m/s).

- Berechnen Sie die Grundfrequenz  $\nu_0$  der Dampfpeife beim Anblasen mit Wasserdampf (Schallgeschwindigkeit in Wasserdampf:  $v_D = 500$  m/s).
- Die Lokomotive fährt mit  $v = 108$  km/h auf einen Tunnel in einem Berg zu und gibt dabei ein kontinuierliches Signal aus ihrer Dampfpeife ab. In einem Waggon hinter der Lokomotive hört man dieses Signal direkt und vom Berg reflektiert. Berechnen Sie das Verhältnis der gehörten Frequenzen.

#### Lösung:

- In der Dampfpeife bildet sich eine stehende Welle aus, die an beiden Enden jeweils einen Wellenbauch aufweist, da die Pfeife dort offen ist. Damit besitzt die Grundschiwingung der Frequenz  $\nu_0$  der stehenden Welle in der Pfeife genau eine halbe Wellenlänge, also

$$l = \frac{1}{2} \lambda_0 = \frac{1}{2} \frac{v_D}{\nu_0} \Rightarrow \underline{\underline{\nu_0 = \frac{v_D}{2l} = 2000 \text{ Hz.}}}$$

- Die Frequenz, die man direkt im Zug hört ist  $\nu_Z = \nu_Q = 2000$  Hz, weil Quelle und Beobachter die gleiche Geschwindigkeit und gleiche Richtung der Bewegung haben. Für die am Berg reflektierte Schallwelle findet man die Frequenz in zwei Schritten:

- Frequenz der Welle beim Auftreffen am Berg ( $v_B = 0$ ):

$$\nu_B = \nu_Q \frac{v_L}{v_L - v_Q}.$$

- Frequenz der reflektierten Welle beim Beobachter im Zug ( $v_Q = 0$ ):

$$\nu_R = \nu_B \frac{v_L + v_R}{v_L}.$$

Beide Effekte zusammen ergeben

$$\nu_R = \nu_Q \frac{v_L + v_B}{v_L} \frac{v_L}{v_L - v_Q} = \nu_Q \frac{v_L + v_B}{v_L - v_Q},$$

wobei  $v_B = v_Q = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$  ist. Daraus folgt für das Verhältnis

$$\frac{\nu_Z}{\nu_R} = \frac{v_L + v_Q}{v_L - v_Q} = 1.2.$$