Ferienkurs Experimentalphysik 1
2010

Übung 4 - Musterlösung

1. Tiefenmesser (**)

Als einfaches Tiefenmessgerät stelle man sich einen Glaszylinder der Länge $l_0 = 50$ cm mit einer aufgebrachten Skala vor der oben abgeschlossen ist und unten offen. Taucht man den Zylinder mit der offenen Seite nach unten senkrecht ins Wasser (Dichte von Wasser: $\varrho_\mathrm{W} = 1000$ kgm^{-3}), so lässt sich am Wasserpegel im Zylinder die Tauchtiefe ablesen.

a) Wie groß ist der durch das Wasser verursachte Druck in 5 m Tiefe?

b) Wie weit ist in dieser Tiefe Wasser in den Kolben gedrückt?
Hinweis: Verwenden Sie die Kompressibilität κ (Kompressibilität von Luft: $\kappa_\mathrm{L} = 0.99 \cdot 10^{-5}$ Pa^{-1})

c) In welcher Tiefe war der Taucher, wenn er bemerkt, dass sich der Wasserpegel im Zylinder um 1 mm ändert, wenn er 1 m tiefer taucht?

Lösung:

a) Der Druck in 5 m Tiefe (ohne Umgebungsdruck) wird durch die Gewichtskraft des darüber liegenden Wassers verursacht. Er ist also gegeben durch

$$p(z) = \frac{F_\mathrm{g}}{A} = \frac{\varrho_\mathrm{W} A z g}{A} = \varrho_\mathrm{W} g z$$

Für eine Tiefe von 5 m erhält man somit einen Druck von

$$\underline{\underline{p(z = 5\ \mathrm{m}) = 49.05\ \mathrm{kPa}.}}$$

b) Durch den äußeren Druck des Wassers wird die Luft in dem Glaszylinder komprimiert (Der Umgebungsdruck spielt keine Rolle, da dieser gerade dem Luftdruck im Zylinder entspricht). Mit Hilfe der Kompressibilität

$$\kappa_\mathrm{L} = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$$

erhält man die separierbare DGL

$$-\kappa_\mathrm{L} \mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}l}{l}$$

mit der Lösung

$$\int_{l_0}^{l} \frac{\mathrm{d}l'}{l'} = -\kappa_\mathrm{L} \int_0^p \mathrm{d}p' \;\Rightarrow\; \ln\frac{l}{l_0} = -\kappa_\mathrm{L} p \;\Rightarrow\; l(p) = l_0 \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} p}.$$

Diese Funktion gibt an, welche Strecke in dem Zylinder noch mit Luft gefüllt ist. Der Wasserpegel $s(p)$ ist dann durch

$$s(p) = l_0 - l(p) = l_0(1 - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} p})$$

gegeben. Mit dem in a) berechneten Wert erhält man für die Steighöhe

$$\underline{\underline{s(p = 49.05 \text{ kPa}) = 19.2 \text{ cm}.}}$$

c) Die in b) verwendete Funktion für die Steighöhe des Wassers in dem Glaszylinder kann man mit a) auch von der Tauchtiefe z abhängig machen. Man erhält

$$s(z) = l_0(1 - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g z}).$$

Mit $\Delta s = s(z_2) - s(z_1) = 1$ mm und $\Delta z = z_2 - z_1 = 1$ m gilt außerdem

$$\Delta s = l_0(\mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{l} \varrho_\mathrm{W} g z_1} - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g z_2}).$$

Multiplizieren mit $\mathrm{e}^{\kappa_\mathrm{W} \varrho g z_1}$ und auflösen nach z_1 führt auf

$$\underline{\underline{z_1 = \frac{1}{\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g} \ln\left[\frac{l_0}{\Delta s}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g \Delta z}\right)\right] = 39.5 \text{ m}.}}$$

2. Ballon (*)

Ein Heißluftballon mit Volumen $V_0 = 3000$ m^3 befindet sich auf der Erdoberfläche (Druck $p_0 = 1000$ hPa, Dichte $\varrho_0 = 1.293$ kgm^{-3}, Temperatur $T = 0$ °C überall konstant).

a) Berechnen Sie den Luftdruck und die Luftdichte in 600 m Höhe.

b) Berechnen Sie die Auftriebskraft des Ballons auf der Erdoberfläche und in 600 m Höhe.

c) Welche Masse dürfen Ballonhülle, -korb und die Last zusammen höchstens haben um auf eine Höhe von 600 m zu gelangen?

Lösung:

a) Mit Hilfe der barometrischen Höhenformel aus der Vorlesung

$$p(z) = p_0 \mathrm{e}^{-gz\varrho_0/p_0}$$

erhält man für den Luftdruck in 600 m Höhe

$$\underline{\underline{p(z = 600\ \mathrm{m}) = 926.72\ \mathrm{hPa}.}}$$

Die Dichte der Luft erhält man auch aus der barometrischen Höhenformel. Wegen $p/\varrho = p_0/\varrho_0 = \mathrm{const.}$ folgt

$$\varrho(z) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-gz\varrho_0/p_0}.$$

Für die Luftdichte in 600 m Höhe erhält man damit

$$\underline{\underline{\varrho(z = 600\ \mathrm{m}) = 1.198\ \mathrm{kgm}^{-3}.}}$$

b) Die Auftriebskraft entspricht der durch den Ballon verdrängten Luftmasse. Am Boden ergibt sich also

$$\underline{\underline{F_\mathrm{A}(z = 0\ \mathrm{m}) = \varrho_0 V_0 g = 38.1\ \mathrm{kN}}}$$

und in einer Höhe von 600 m

$$\underline{\underline{F_\mathrm{A}(z = 600\ \mathrm{m}) = \varrho(z = 600\ \mathrm{m}) V_0 g = 35.3\ \mathrm{kN}.}}$$

c) Wenn der Ballon gerade noch auf eine Höhe von 600 m aufsteigen soll, müssen sich Auftriebs- und Gewichtskraft in dieser Höhe gerade kompensieren. Die maximale Last ist dann gegeben durch

$$\underline{\underline{m_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{A}(z = 600\ \mathrm{m})}{g} = \varrho(z = 600\ \mathrm{m}) V_0 = 3.6\ \mathrm{t}.}}$$

3. Energie eines Gases (*)

Ein Raum des Volumens 40 m^3 enthalte ein Gas mit dem Druck $p = 1000$ hPa.

a) Berechnen Sie die gesamte translatorische kinetische Energie aller Gasmoleküle, die sich in diesem Raum befinden.

b) Nehmen Sie an, das Gas in diesem Raum sei bei einer hohen Temperatur und bestehe vollständig aus zweiatomigen Molekülen für die alle Freiheitsgrade angeregt sind. Berechnen Sie die zusätzliche Rotations- und Vibrationsenergie des Gases.

Lösung:

a) Die translatorische kinetische Energie eines Gases (egal aus wievielen Atomen die Moleküle bestehen) ist nach der idealen Gasgleichung $pV = Nk_\mathrm{B}T$

$$\underline{\underline{E_\mathrm{trans} = N \cdot \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T = \frac{3}{2} pV = 6.0\ \mathrm{MJ}.}}$$

b) Die Gesamtenergie der Gasmoleküle ist

$$E = N \cdot \frac{f}{2} k_\mathrm{B} T = \frac{f}{2} pV.$$

Nun gibt es bei einem mehratomigen Molekül drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgraden. Bei einem zweiatomigen Molekül kommt noch ein Vibrationsfreiheitsgrad hinzu (Schwingung der Atomkerne entlang ihrer Verbindungsachse), d.h. $f = 3 + 3 + 1 = 7$. Die Energie der Rotations- und Vibrationsbewegungen ist demnach

$$\underline{\underline{E_\mathrm{rot/vib} = \frac{4}{2} pV = 8.0\ \mathrm{MJ}.}}$$

4. Stickstoffmoleküle (*)

a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit eines Stickstoffmoleküls in einem Gas bei $T = 25°\mathrm{C}$ mithilfe der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung.

b) Wie groß ist die Anzahl N der Stickstoffmoleküle in einem Volumen von 1 m^3 bei einem Druck von 1000 hPa und welcher Stoffmenge entspricht das?

Lösung:

a) Die Stickstoffatome im N_2-Molekül bestehen aus 14 Nukleonen. Die Masse des Stickstoffmoleküls ist somit durch $m = 2 \cdot 14$ u gegeben. Aus der Vorlesung erhalten wir die Formel für die mittlere Geschwindigkeit

$$\underline{\underline{\overline{v} = \sqrt{\frac{8 k_\mathrm{B} T}{\pi m}} = 474.82\ \mathrm{m/s}.}}$$

b) Aus der idealen Gasgleichung

$$pV = N k_\mathrm{B} T$$

erhält man für die Anzahl der Stickstoffmoleküle

$$\underline{\underline{N = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = 2.43 \cdot 10^{25}.}}$$

Dies entspricht einer Stoffmenge von

$$\underline{\underline{n = \frac{N}{N_\mathrm{A}} = 40.34\ \mathrm{mol} \approx \frac{V}{V_\mathrm{mol}}.}}$$

Da hier nicht mit Standardbedingungen gerechnet wurde, erhält man für die Rechnung mit dem molaren Volumen einen 'leicht' abweichenden Wert.

5. Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung (**)

Im thermischen Gleichgewicht ist die Geschwindigkeitsverteilung durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gegeben.

a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Verteilung.

b) Bestimmen Sie das mittlere Geschwindigkeitsquadrat.
Hinweis: Die Tatsache, dass $x^n \mathrm{e}^{-ax} = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\right)^n \mathrm{e}^{-ax}$ ist, könnte nützlich sein.

Lösung:

a) Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w tritt am Maximum der Verteilung auf. Für das Maximum gilt

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}\right|_{v=v_\mathrm{w}} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2}}_{=:C} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right)\right]\right|_{v=v_\mathrm{w}} = \\
&= C\left[2v_\mathrm{w} \exp\left(-\frac{mv_\mathrm{w}^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right) - v_\mathrm{w}^2 \frac{mv_\mathrm{w}}{k_\mathrm{B}T} \exp\left(-\frac{mv_\mathrm{w}^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right)\right] = \\
&= 2Cv_\mathrm{w} \exp\left(-\frac{mv_\mathrm{w}^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right) \underbrace{\left(1 - v_\mathrm{w}^2 \frac{m}{2k_\mathrm{B}T}\right)}_{\overset{!}{=}0} \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Somit folgt ($v_\mathrm{w} = 0$ kann man ausschließen)

$$\underline{\underline{v_\mathrm{w} = \sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}}.}}$$

b) Das mittlere Geschwindigkeitsquadrat erhält man aus

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^2 f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^4 \exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right).$$

Für die Auswertung des Integrals erhält man mit dem Hinweis und $a = m/(2k_\mathrm{B}T)$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^4 \mathrm{e}^{-av^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}v\, \frac{\partial^2}{\partial a^2} \mathrm{e}^{-av^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, \mathrm{e}^{-av^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}},$$

wobei man sich das Integral über die Gaußglocke

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

merken sollte (für die Herleitung cf. Analysis). Wir erhalten also letztendlich

$$\underline{\underline{\overline{v^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}\right)^{5/2} = 3\frac{k_\mathrm{B}T}{m}}}.$$

6. Zeitdilatation (*)

Myonen sind Elementarteilchen, welche im Mittel nach $\tau = 2.2\ \mu$s zerfällt. In einem Teilchenbeschleuniger der Länge 3 km hat man Myonen auf fast Lichtgeschwindigkeit beschleunigt.

a) Wenn man klassisch rechnet, welche Strecke legt ein Myon im Mittel während seiner Lebenszeit zurück?

b) Nun möchte man den Myonenstrahl aber gerne über möglichst die gesamte Länge des Beschleunigers schicken, und in der Tat kann man das auch. Erklären Sie dies, indem Sie die relativistische Zeitdilatation berücksichtigen. Welche Strecke kann ein Myon im Mittel zurücklegen, wenn seine Geschwindigkeit 99% der Lichtgeschwindigkeit beträgt?

c) In seinem eigenen Bezugssystem lebt das Myon jedoch nur 2.2 μs. Warum muss das Myon jetzt nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit fliegen?

Lösung:

a) Die maximale Geschwindigkeit des Myons ist $c \approx 300000$ km/s. Klassisch ist die Strecke also

$$\underline{\underline{l = c\tau = 660\ \mathrm{m}}}.$$

b) Die Lebenszeit des Myons wie angegeben ist natürlich im Bezugssystem des Myons so. Die Zeitdilatation lässt diese für einen relativ dazu bewegten Beobachter wie zum Beispiel einen Versuchsaufbau am Teilchenbeschleuniger um den Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} = 7.08$$

länger erscheinen. Die innerhalb des Beschleunigers zurücklegbare Strecke ist also

$$\underline{\underline{\gamma \cdot 660 \text{ m} = 4631 \text{ m}}}.$$

c) Das Myon lebt in seinem eigenen Bezugssystem immer noch die Zeit von 2.2 μs. Der Teilchenbeschleuniger erscheint ihm aber entlang der Bewegungsrichtung gestaucht (Längenkontraktion), und zwar um den selben Faktor wie die Lebensdauer im Beschleunigersystem gestreckt ist.

7. Kontrahierter Maibaum (**)

Es ist Ende April, und in Uffing am Staffelsee soll bald der Maibaum aufgestellt werden. Die Uffinger haben dieses Jahr einen besonders langen Maibaum von $l = 20$ m. Der neidischen Blicke ihrer Seehausener Nachbarn wohl bewusst lassen sie ihn in der Nacht vor dem ersten Mai bewachen. Da Uffinger aber gerne ihr Trinkvermögen überschätzen, schlummert die gesamte Wachmannschaft um Mitternacht bereits. Dies haben selbstverständlich die Seehausener beobachtet und wollen den Maibaum in einem Bootshaus im 2 km weit entfernten Seehausen. Das Bootshaus ist aber nur 10 m lang. Da Seehausener schlau sind, fällt ihnen natürlich sofort auf, dass zur Lösung dieses Problems die Längenkontraktion verwendet werden könnte. Schließlich weiß man, dass sich schnell bewegte Gegenstände verkürzen... Sie rechnen also die Geschwindigkeit aus, mit welcher sie den Maibaum forttragen müssten, und weil Seehausener stark sind, können sie auch sofort auf diese beschleunigen (und bei der Ankunft wieder abbremsen).

a) Wie lange nach Mitternacht sind die Seehausener am Bootshaus (in der Zeitmessung der Uffinger)?
b) Wo liegt der Fehler im Gedankengang der Seehausener?

Lösung:

a) Die Längenkontraktion muss den Baum um die Hälfte stauchen. Es gilt also

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$$

oder

$$v = 258075 \text{ km/s}.$$

Mit der Entfernung von 2 km zeigen die Uffinger Uhren also

$$\underline{\underline{t = \frac{v}{l} = 7.75\ \mu\text{s}}}$$

nach Mitternacht.

b) Wenn der Maibaum auch tatsächlich in das Bootshaus hineinpasst, tut er dies jedoch nur solange, wie er sich mit der besagten Geschwindigkeit relativ dazu bewegt. Naturgemäß ist er recht bald wieder draußen, und das Versteck wird wohl nicht reichen, um den Maibaum bis zum nächsten Tag von den Uffingern fern zu halten. Selbstverständlich werden sie den Trick das nächste Jahr wieder probieren. Seehausener sind nämlich auch zäh...

8. Zeitlich und örtlich getrennte Ereignisse (**)

Zeigen sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation:

a) Die zeitliche Reihenfolge von zwei raumartig getrennten Ereignissen (t_1, x_1), (t_2, x_2) hängt vom Bezugssystem ab. Es gibt insbesondere ein Bezugssystem, in dem sie gleichzeitig sind.

b) Die zeitliche Reihenfolge von zeitartig getrennten Ereignissen hängt nicht vom Bezugssystem ab. Es gibt ein Bezugssystem, in welchem sie am gleichen Ort stattfinden.

Hinweis: Verwenden sie $|v| < c$.

Lösung:

a) Ohne Einschränkung wählen wir $\Delta t = t_1 - t_2 > 0$ und $\Delta x = x_1 - x_2 > 0$. Raumartige Trennung bedeutet nun, dass

$$\Delta x > c\Delta t.$$

Der transformierte Zeitunterschied ist

$$\begin{aligned} t_1' - t_2' &= \gamma\left(t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)\right) \\ &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right). \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\Delta t' > 0$$

entspricht damit

$$\underline{\underline{\frac{c\Delta t}{\Delta x} > \frac{v}{c}.}}$$

Da die linke Seite nach Voraussetzung eine Größe zwischen 0 und ausschließlich 1 ist, lässt sich ein v finden, so dass die Ungleichung erfüllt ist. Mit der selben Argumentation zeigt man die anderen zwei Fälle. Für den Fall der Gleichzeitigkeit ist

$$\underline{\underline{v = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x}}}.$$

b) Ohne Einschränkung wählen wir $\Delta t = t_1 - t_2 > 0$ und $\Delta x = x_1 - x_2 > 0$. Zeitartige Trennung bedeutet, dass

$$\Delta x < c\Delta t.$$

Man macht die selben Umformungen wie in der vorherigen Teilaufgabe. Eine Umkehrung der Reihenfolge würde nun bedeuten, dass

$$\Delta t' < 0$$

bzw.

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < \frac{v}{c}.$$

Da aber nach Voraussetzung

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1$$

gilt die Ungleichung nur für $v/c > 1$, also für keine Geschwindigkeit.

Die Ereignisse werden auf den gleichen Ort abgebildet, wenn

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0$$

gilt, also

$$\underline{\underline{\frac{v}{c} = \frac{\Delta x}{c\Delta t}}}.$$

Nach Voraussetzung der zeitlichen Trennung existiert eine passende Geschwindigkeit v.

9. Anruf von Erde (***)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet von der Erde (Bezugssystem S, Ort $x = 0$) ein Raumschiff (Bezugssystem S', Ort $x' = 0$) mit der der Geschwindigkeit v in x-Richtung. Die Erde funkt zum Zeitpunkt $\tau = 1$ Tag die Nachricht 'Alles klar?'. Das Raumschiff hat einen Empfänger für dieses Signal dabei.

a) Zeigen Sie: Wenn der Funkspruch empfangen wird, hat das Raumschiff bezüglich S den Ort $x = \frac{v\tau}{1-v/c}$ und die Uhr von S zeigt die Zeit $t = \frac{\tau}{1-v/c}$.

b) Benutzen Sie das Ergebnis von a) um die Ankunftszeit des Funkspruches bezüglich S' zu berechnen.

Lösung:

a) Dies kann man einfach mit der Bewegung lösen: Im System S hat das Raumschiff den Ort

$$x = vt.$$

Damit der Funkspruch auf den Empfänger trifft, muss gelten, dass

$$x = ct - c\tau.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke gleich und löst nach t auf erhält man

$$\underline{\underline{t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} = 2.5 \text{ Tage}}}$$

bzw. mit der ersten Gleichung

$$\underline{\underline{x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} = 3888 \cdot 10^{10} \text{ m.}}}$$

b) Die Ankunftszeit t' ist gemäß der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ &= \gamma\left(\frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{v^2\tau}{c^2\left(1 - \frac{v}{c}\right)}\right) \\ &= \gamma\tau\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}} \\ &= \gamma\tau\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{5}{4}\frac{8}{5}\tau = \underline{\underline{2\tau = 2 \text{ Tage}}}. \end{aligned}$$