Ferienkurs Experimentalphysik 1
2010

Übung 3 - Musterlösung

1. Katapult (*)

Ein menschliches Haar habe ein Elastizitätsmodul $E = 5 \cdot 10^8$ N/m^2 . Nehmen Sie an, dass sich das Haar elastisch verhält, bis es für Dehnungen größer als 10% beschädigt wird. Berechnen Sie das Volumen an Haar, das Archimedes 250 v.C. für ein Katapult benötigte, um einen Fels von 50 kg auf eine Geschwindigkeit von 20 m/s zu beschleunigen.

Lösung:

Mit dem Hookeschen Gesetz aus der Vorlesung erhält man die übliche Federkraft

$$\frac{F}{A} = \sigma = E\epsilon = E\frac{\Delta l}{l} \;\Rightarrow F = \underbrace{\frac{EA}{l}}_{=k}\underbrace{\Delta l}_{=x}$$

mit der Federkonstanten k. Nun lässt sich die Energieerhaltung anwenden

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 = E_{\text{spann}} = \frac{k}{2}x^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}EV\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\epsilon^2.$$

Somit erhält man für das Volumen an Haar mit $\epsilon = 10\%$

$$\underline{\underline{V = \frac{mv^2}{E\epsilon^2} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3.}}$$

2. Stahlseil (**)

Welche Längenänderung erfährt ein Stahlseil (Elastizitätsmodul Stahl: $E_{\text{St}} = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, Dichte Stahl: $\varrho_{\text{St}} = 7.7 \cdot 10^3$ kg/m^3) der Länge $L = 9$ km, wenn es

a) in einem senkrechten Schacht hängt?

b) im Meer (Dichte Wasser: $\varrho_{\text{W}} = 1.03 \cdot 10^3$ kg/m^3) abgesenkt wird?

Lösung:

Die Zugspannung in der Höhe z über dem Seilende ist allgemein

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\varrho V g}{A} = \varrho g z.$$

Aus dem Hookeschen Gesetz erhält man für die relative Dehnung in der Höhe z

$$\epsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E}.$$

Für die gesamte Dehnung muss nun über die relative Dehnung integriert werden

$$\underline{\underline{\Delta L = \int_0^L \mathrm{d}z\, \epsilon(z) = \frac{\varrho g}{E} \int_0^L \mathrm{d}z\, z = \frac{\varrho g}{2E} L^2.}}$$

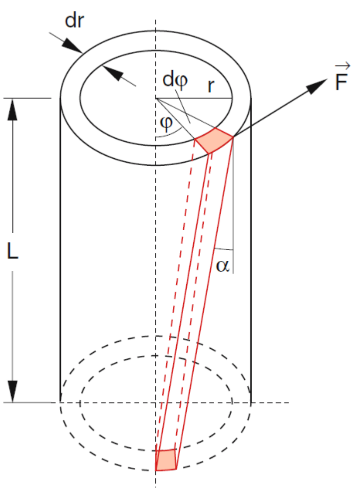
a) Für das Stahlseil erhält man mit ϱ_{St}

$$\underline{\underline{\Delta L = 15.3\ \mathrm{m}}}.$$

b) Wird das Stahlseil im Meer abgesenkt, so benötigt man aufgrund des Auftriebs die Differenz der Dichten $\Delta\varrho = \varrho_{\mathrm{St}} - \varrho_{\mathrm{W}}$. Man erhält somit

$$\underline{\underline{\Delta L = 13.3\ \mathrm{m}}}.$$

3. Torsion eines Drahtes (**)



Gegeben sei ein zylindrischer Draht mit Radius R und der Länge $L \gg R$ an dessen oberem Ende eine Kraft $\boldsymbol{F}$ tangential angreift (s. Abbildung). Berechnen Sie das aufgrund der Torsion des Drahtes wirkende rücktreibende Drehmoment D_{r}.

Lösung:

Wegen $L \gg R$ lässt sich die Näherung $\sin\alpha \simeq \alpha = r\varphi/L$ machen. Die Scherspannung lautet somit, gemäß der Formel aus der Vorlesung

$$\tau = G\frac{r\varphi}{L}.$$

Da alle Flächenelemente auf dem oberen Kreisring mit der Fläche $2\pi r dr$ um den gleichen Winkel φ verdreht werden, ist der Betrag $\mathrm{d}F$ der Kraft, die zur Scherung der

Zylinderhülse führt

$$\mathrm{d}F = \tau \cdot 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2\pi\varphi G}{L} r^2 \mathrm{d}r$$

und der Betrag des entsprechenden Drehmoments

$$\mathrm{d}D = r\mathrm{d}F = \frac{2\pi\varphi G}{L} r^3 \mathrm{d}r.$$

Zur Verdrillung des gesamten massiven Zylinders vom Radius R um den Winkel φ wird daher das Drehmoment

$$\underline{\underline{D = \frac{2\pi\varphi G}{L} \int\limits_0^R \mathrm{d}r\, r^3 = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \varphi}}$$

benötigt. Im Gleichgewicht muss das rücktreibende Drehmoment D_r entgegengesetzt gleich sein, es gilt also $D_\mathrm{r} = -D$.

4. Durchbiegung eines Rohres (*)

Berechnen Sie mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung die maximale Durchbiegung eines einseitig eingespannten kreisrunden Rohres der Länge L mit Innendurchmesser R_1, Außendurchmesser R_2 und einem Elastizitätsmodul E unter einer Belastung F.
Hinweis: Das polare (bezogen auf den Schwerpunkt) Flächenträgheitsmoment ist die Summe der beiden axialen (bezogen auf die neutrale Faser) Flächenträgheitsmomente welche hier benötigt werden: $J_\mathrm{p} = J_x + J_y$.

Lösung:

Aus der Vorlesung entnimmt man für die maximale Durchbiegung s eines einseitig eingespannten Balkens

$$s = \frac{L^3 F}{3EJ_\mathrm{a}}.$$

Man benötigt also nur noch das axiale Flächenträgheitsmoment J_a. In ebenen Polarkoordinaten erhält man mit $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ für das polare Flächenträgheitsmoment

$$J_\mathrm{p} = \iint \mathrm{d}A\, r^2 = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}r\, r^3 = \frac{\pi}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right).$$

Für die maximale Durchbiegung erhält man also mit $J_\mathrm{a} = J_\mathrm{p}/2$

$$\underline{\underline{s = \frac{4}{3\pi} \frac{L^3 F}{E\left(R_2^4 - R_1^4\right)}}}.$$

5. Schwimmender Quader (**)

Betrachten Sie einen schwimmenden Körper in Form eines flachen Quaders mit Höhe c und quadratischer Grundfläche der Kantenlänge a, der aus einem Material homogener Dichte besteht.

a) Zeigen Sie, dass sich die untergetauchte Höhe zur Gesamthöhe des Quaders so verhält, wie die Dichte seines Materials zur Dichte von Wasser.

b) Der schwimmende Körper befinde sich nun in einem Wasserbecken der Fläche A mit der Wassertiefe h_0. Zeigen Sie, dass die Eintauchtiefe im Gleichgewicht die potentielle Energie des Gesamtsystems aus Körper und Wasser minimiert.

Lösung:

a) Nach dem Auftriebsgesetz taucht der Körper so weit ein, bis das Gewicht des verdrängten Wassers seinem eigenen Gewicht gleicht. Für die Eintauchtiefe h_- gilt also

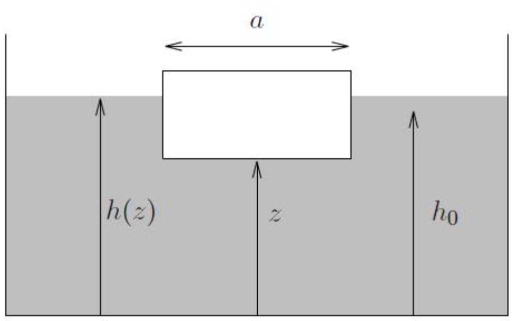
$$\rho_{\mathrm{W}} a^2 h_- = \rho_{\mathrm{Q}} a^2 c$$

und somit

$$\underline{\underline{\frac{h_-}{c} = \frac{\rho_{\mathrm{Q}}}{\rho_{\mathrm{W}}}}}.$$

b) Die Höhe der Unterseite des Quaders über dem Beckenboden sei z. Dann ist die Höhe des Wasserspiegels im Becken als Funktion von $z \leq h_0$ gegeben durch die Bedingung, dass das Gesamtvolumen des Wassers im Becken konstant, d.h. unabhängig von z ist

$$a^2 z + (A - a^2) h(z) = A h_0.$$



Also gilt

$$h(z) = \frac{Ah_0 - a^2 z}{A - a^2}.$$

Die potentielle Energie des Quaders als Funktion von z ist gegeben durch die Höhe seines Schwerpunkts

$$V_\mathrm{Q}(z) = \rho_\mathrm{Q} a^2 c g \left(z + \frac{c}{2}\right).$$

Die potentielle Energie des Wassers setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Das Wasser unterhalb des Quaders und das Wasser im Rest des Beckens

$$V_\mathrm{W}(z) = \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} a^2 z^2 + \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} (A - a^2) h^2(z).$$

Die gesamte potentielle Energie von Quader und Wasser ist also

$$V(z) = \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} a^2 z^2 + \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} \frac{(Ah_0 - a^2 z)^2}{A - a^2} + \rho_\mathrm{Q} a^2 c g \left(z + \frac{c}{2}\right).$$

Die Ableitung nach z ergibt

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = g \rho_\mathrm{W} a^2 z - g \rho_\mathrm{W} a^2 \frac{Ah_0 - a^2 z}{A - a^2} + g \rho_\mathrm{Q} a^2 c \overset{!}{=} 0.$$

In dem Bruch erkennt man die Höhe des Wasserspiegels $h(z)$ wieder, also folgt nach Division durch $g \rho_W a^2$

$$h(z) - z = \frac{\rho_\mathrm{Q}}{\rho_\mathrm{W}} c.$$

Die Eintauchtiefe $h_-(z) = h(z) - z$ zu minimaler Gesamtenergie ist also genau durch die in a) gefundene Gleichung

$$\underline{\underline{\frac{h_-}{c} = \frac{\rho_\mathrm{Q}}{\rho_\mathrm{W}}}}$$

gegeben, also durch das Auftriebsgesetz.

6. Oberflächenspannung (**)

a) Zwei Glasplatten werden in einem Abstand $d = 0.1$ mm zueinander justiert und anschließend mit einer offenen Seite in Wasser getaucht. Wie hoch steigt das Wasser, wenn Sie davon ausgehen, dass Wasser eine Oberflächenspannung von

$\Delta\sigma = 72.75 \cdot 10^{-3}$ J/m^2 ($\Delta\sigma = \sigma_{\text{Luft-Wand}} - \sigma_{\text{Wasser-Wand}}$) besitzt und außerdem Randeffekte vernachlässigen?

b) Nun werden zwei gleichartige rechteckige Glasplatten an einer Seite auf 1 mm Abstand gehalten (z.B. durch ein dazwischen geklemmtes Streichholz), auf der anderen Seite berühren sie sich. Dann wird das Ganze so in ein Gefäß mit Wasser gestellt, dass die Seite an der sich die Platten berühren, senkrecht zur Wasseroberfläche steht. Welche Kurve bildet die Oberfläche der zwischen den Platten aufgestiegenen Flüssigkeit entlang der Symmetrieebene zwischen den Platten?

Lösung:

a) Lösung über Minimierung der Gesamtenergie des Systems als Funktion der Steighöhe h

$$V_{\text{W}}(h) = \frac{1}{2} mgh = \frac{1}{2} \rho g d l h^2$$

(l ist die „Tiefe" der Platten) und

$$V_{\text{O}}(h) = -2\Delta\sigma \cdot hl.$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass Energie frei wird, wenn das Wasser höher steigt und eine größere Oberfläche benetzt, also nimmt V_{O} für größere h ab. Insgesamt gilt

$$V(h) = \frac{1}{2} \rho g d l h^2 - 2\Delta\sigma \cdot hl$$

und somit

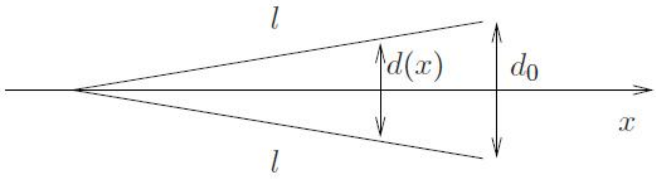
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \rho g d l h - 2\Delta\sigma \cdot l \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies führt auf die Steighöhe, die die Gesamtenergie minimiert

$$\underline{\underline{h = \frac{2\Delta\sigma}{\rho g d} \approx 14.8 \text{ cm.}}}$$

b) Man kann hier direkt die in a) abgeleitete Formel für h verwenden, wobei man nur berücksichtigen muss, dass d jetzt keine Konstante sondern eine Funktion von x ist. Und zwar ist d linear in x, also

$$d(x) = \alpha x.$$



Die dimensionslose Proportionalitätskonstante α bestimmt sich aus der Bedingung, dass wenn $d(x)$ den Wert $d_0 = 1$ mm erreicht hat, für x die Gleichung

$$x^2 + \left(\frac{d_0}{2}\right)^2 = l^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{l^2 - \frac{d_0^2}{4}}$$

gilt. Also

$$\alpha\sqrt{l^2 - \frac{d_0^2}{4}} = d_0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{d_0}{\sqrt{l^2 - \frac{d_0^2}{4}}} \approx \frac{d_0}{l} \text{ für } d_0 \ll l$$

und somit

$$d(x) = \frac{d_0}{l} x.$$

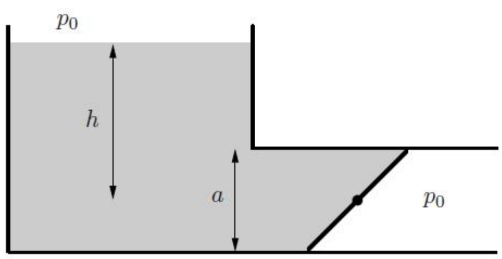
Damit folgt schließlich

$$\underline{\underline{h(x) = \frac{2\Delta\sigma}{\rho g d(x)} = \frac{2\Delta\sigma l}{\rho g d_0} \frac{1}{x}}}.$$

Die Kurve ist also eine Hyperbel.

7. Ablauf mit Klappe (**)

Der in der Abbildung dargestellte rechtwinklige Ablauf der Höhe $a = 12$ m ist mit einer rechteckigen (Breite $b = 10$ m) um $\alpha = 45°$ geneigten drehbaren Klappe verschlossen. Die Achse, in der die Klappe gelagert ist, befindet sich $h = 18$ m unterhalb der Wasseroberfläche und in der Mitte des Ablaufs. Der Druck der umgebenden Luft ist $p_0 = 1013$ hPa.



a) Warum öffnet sich die Klappe nicht von selbst?

b) Berechnen Sie das Drehmoment, das nötig ist, um die Klappe zu öffnen.

Lösung:

a) Der Wasserdruck ist in Bodennähe größer als weiter oben, daher wirkt auf die untere Hälfte der Klappe eine größere Kraft als auf die obere Hälfte. Dadurch wird ein Drehmoment auf die Klappe im Uhrzeigersinn erzeugt, das die Klappe gegen die Wand presst und so den Ablauf verschließt.

b) Wahl des Koordinatensystems: z-Achse zeigt nach oben, der Nullpunkt liegt am Boden des Ablaufbeckens. Dann ist der Druck im Wasser als Funktion von z gegeben durch

$$p(z) = p_0 + \rho g \left(h + \frac{a}{2} - z\right).$$

Auf die Klappe wirkt von rechts der konstante Gegendruck p_0, d.h. der resultierende Druck auf die Klappe ist

$$p_{\mathrm{K}}(z) = \rho g \left(h + \frac{a}{2} - z\right).$$

Um den Druck über die Klappe integrieren zu können, ist es sinnvoll die Koordinate y auf der Klappe einzuführen. Der Nullpunkt sei auf der Höhe der Drehachse und die positive Richtung zeige nach oben. Dann ist rein geometrisch

$$z(y) = \frac{a}{2} + y \sin\alpha$$

und der Druck als Funktion von y

$$p_{\mathrm{K}}(y) = p_{\mathrm{K}}(z(y)) = \rho g (h - y \sin\alpha).$$

Für das Drehmoment muss man über y in den Grenzen $y = -a/(2\sin\alpha)$ bis $y = a/2(\sin\alpha)$ integrieren

$$D = \int_{-a/(2\sin\alpha)}^{a/(2\sin\alpha)} \mathrm{d}y\, b p_{\mathrm{K}}(y) y.$$

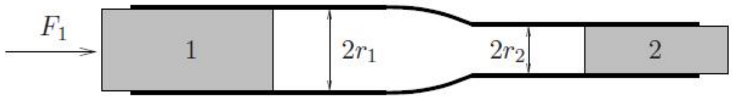
Das Flächenelement ist der Streifen $b\mathrm{d}y$, die Kraft ist Fläche mal Druck, und der Hebelarm ist y. Es ergibt sich hieraus

$$D = b\rho g \int_{-a/(2\sin\alpha)}^{a/(2\sin\alpha)} \mathrm{d}y\, hy - y^2 \sin\alpha = -b\rho g \sin\alpha \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{-a/(2\sin\alpha)}^{a/(2\sin\alpha)}$$

$$= -b\rho g \sin\alpha \frac{1}{3} \frac{2a^3}{8\sin^3\alpha} = \underline{\underline{-\frac{a^3 b\rho g}{12\sin^2\alpha} = 28.25 \cdot 10^6 \text{ Nm.}}}$$

8. Wasserführendes Rohr (*)

Betrachten Sie ein gerades wasserführendes Rohr, das sich vom Radius r_1 auf den Radius r_2 verengt und auf beiden Seiten mit beweglichen Kolben verschlossen ist (s. Abbildung). Auf den linken Kolben wird zusätzlich zum Atmosphärendruck p_0 die Kraft F_1 ausgeübt, auf den rechten Kolben wirkt von außen nur der Atmosphärendruck. Das System befinde sich in einem stationären Zustand. Betrachten Sie das Wasser als inkompressibel und reibungsfrei.



Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Kolben?
Mit welcher Kraft F_2 wird der rechte Kolben aus dem Rohr herausgedrückt?
Wie groß ist der Druck im Wasser vor der Verengung (p_1) und nach der Verengung (p_2)?
Was geschieht im Fall $r_1 = r_2$?

Lösung:

Für die stationäre Strömung gelten die Kontinuitätsgleichung

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

mit den Querschnittflächen $A_1 = \pi r_1^2$ und $A_2 = \pi r_2^2$, sowie die Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Da das System stationär sein soll, muss an beiden Kolben Kräftegleichgewicht herrschen, d.h.

$$\underline{\underline{p_1 = p_0 + \frac{F_1}{A_1} \quad \text{und} \quad p_2 = p_0.}}$$

Von innen wirkt auf beide Kolben tatsächlich nur der jeweilige statische Druck des Wassers, da an der Berührungsfläche Wasser-Kolben das Wasser relativ zum Kolben ruht. Damit kann man nun das System aus Kontinuitätsgleichung und Bernoulli-Gleichung nach den Geschwindigkeiten auflösen. Es ergibt sich

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}(p_2 - p_1) = \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}\frac{F_1}{A_1}.$$

Also gilt

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}\sqrt{\frac{2F_1}{\rho A_1}} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}\sqrt{\frac{2F_2}{\rho A_1}}}}.$$

Beide Ausdrücke sind reell für $A_2 < A_1$.

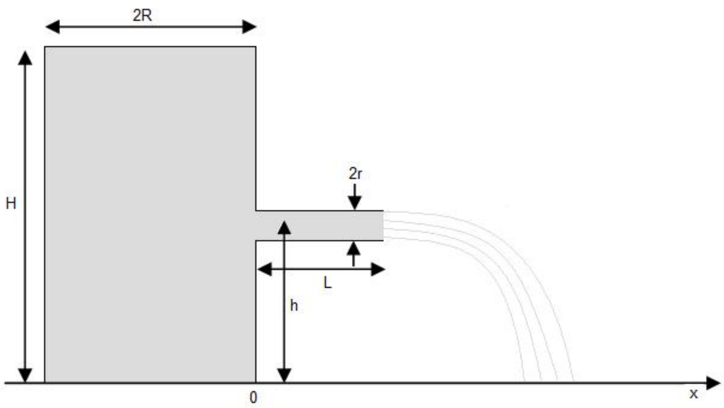
Die Drücke p_1 und p_2 sind bereits oben bestimmt worden. Die Kraft mit der der rechte Kolben herausgedrückt wird, ist

$$\underline{\underline{F_2 = A_2 p_2 = A_2 p_0}}.$$

Für $r_1 = r_2$, also $A_1 = A_2$ werden die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 für ein nicht verschwindendes F_1 singulär. Das bedeutet, dass sich kein stationärer Zustand einstellen wird, was physikalisch recht plausibel ist.

9. Zylinder (**)

Aus einem mit Flüssigkeit bis zur Höhe H gefüllten Zylinder kann die Flüssigkeit aus einer seitlichen Öffnung in der Höhe h austreten (s. Abbildung).



a) Man berechne für eine reibungsfreie Flüssigkeit den Auftreffpunkt x und die Auftreffgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ für $z = 0$. Vergleiche mit der Fallgeschwindigkeit, die ein aus der Höhe $z = H$ frei fallender Körper hat.

b) Wie ist die Zeitfunktion des Flüssigkeitsspiegels im Zylinder mit Radius R bei einer Flüssigkeit mit der Zähigkeit η, die in der Höhe $h = 0$ durch eine Röhre der Länge L mit Radius $r \ll R$ ausfließt?

Lösung:

a) Der Druck in der Höhe h beträgt

$$p(h) = \rho g(H - h) + p_0$$

und am Ausflussrohr gilt die Bernoulligleichung

$$\Delta p = p(h) - p_0 = \frac{1}{2}\rho v_x^2.$$

Daraus folgt, dass $v_x^2 = 2g(H - h)$ ist. Die Flüssigkeitsteilchen durchlaufen eine Wurfparabel mit der Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0 = (v_x, v_z = 0)$. Die Fallzeit kann aus

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

zu $t = \sqrt{2h/g}$ bestimmt werden. Der Auftreffpunkt $\boldsymbol{P}$ ist dann

$$\underline{\underline{\boldsymbol{P} = (x_a = v_x t, z = 0) = \left(2\sqrt{h(H-h)}, 0\right).}}$$

Die Auftreffgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ ist

$$\underline{\underline{\boldsymbol{v}_\mathrm{a} = (v_x, v_z = gt) \quad \text{mit} \quad |v| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{2gH}.}}$$

Dies ist dieselbe Geschwindigkeit, mit der ein Körper bei senkrechtem Fall aus der Höhe H auftrifft.

b) Nach dem Hagen-Poiseuille-Gesetz gilt

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta p \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{r^4}{R^2}\frac{\rho g H}{8\eta L}$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{H(t) = H_0 \exp\left(-\frac{r^4 \rho g}{8R^2\eta L}\cdot t\right)}}$$

mit $H_0 = H(t = 0)$.

10. Trichter (**)

Aus einem bis zur Höhe H mit Wasser gefüllten Trichter mit dem vollen Öffnungswinkel $\alpha = 60°$ strömt Wasser durch ein waagerechtes Rohr mit Innendurchmesser d und Länge L in ein Vorratsgefäß.

a) Wie sieht die Höhe $H(t)$ des Wasserspiegels im Trichter als Funktion der Zeit aus?

b) Wie ist die Wasserdurchflussmenge $M(t)$?

c) Nach welcher Zeit T ist alles Wasser ausgeflossen, wenn $H = 30$ cm, $d = 0.5$ cm und $L = 20$ cm ist? Die Zähigkeit beträgt $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pas, die Dichte $\rho = 1000$ kg/m^3.

d) Wie ändert sich die Füllzeit für ein 4-Liter Gefäß, wenn man den Trichter mit $V = 4$ l durch Nachgießen immer voll hält?

Lösung:

Der Trichter sei bis zur Höhe H gefüllt, sodass der Radius R der kreisförmigen Wasseroberfläche $R = H\tan(\alpha/2)$ ist. Das Wasservolumen ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi H^3 \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{9}\pi H^3.$$

a) Die Abnahme des Wasservolumens pro Zeiteinheit ist

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\pi H^2 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}.$$

Andererseits gilt nach Hagen-Poiseuille

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta p,$$

wobei $\Delta p = \rho g H$ ist. Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{3}{8}\frac{r^4\rho g}{\eta L}}_{=:a}\frac{1}{H} \;\Rightarrow\; H\mathrm{d}H = -a\mathrm{d}t$$

mit $a \approx 7.2 \cdot 10^{-4}$ m^{2}s^2. Integration liefert

$$H^2 - H_0^2 = -2at \quad \text{mit} \quad H_0 = H(t=0).$$

Daraus folgt für die Höhe des Wasserspiegels $H(t) = \sqrt{H_0^2 - 2at}$.

b) Die Wasserdurchflussmenge ist über $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = \rho\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ mit dem Volumenstrom verbunden. Er ergibt sich also aus Integration der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}\pi a H\rho = -\frac{1}{3}\pi a\rho\sqrt{H_0^2 - 2at}$$

die Wasserdurchflussmenge

$$\underline{\underline{M(t) = \frac{1}{9}\pi\rho(H_0^2 - 2at)^{3/2}.}}$$

c) Die Zeit bis alles Wasser ausgeflossen ist (d.h. $H = 0$) ist $T = H_0^2/(2a)$. Mit $H_0 = 0.3$ m, $r = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m, $L = 0.2$ m, $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pas ist $T = 62.6$ s.

d) Für eine Füllmenge von 4 l wird $H_0 = (9V/\pi)^{1/3} = 0.225$ m. Ohne Nachfüllen des Trichters und mit $a = 7.2 \cdot 10^{-4}$ m^2/s^2 ist dann die Füllzeit $T = 35$ s. Mit Nachfüllen gilt $H = H_0 = \text{const}$. Die Menge, die in der Zeit t in das 4-Liter-Gefäß fließt ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi a H_0 t$$

und daraus $t = 23.6$ s.

11. Fass mit Glyzerin (**)

Ein Fass (Durchmesser $d = 1$ m) ist mit Glyzerin ($\rho_{\text{Gl}} = 1.26 \cdot 10^3$ kg/m^3) bis zum oberen Rand gefüllt. Auf Höhe des Fassbodens ragt ein horizontales Rohr der Länge $L = 70$ cm mit Innendurchmesser $d_{\text{Rohr}} = 1$ cm.

a) Zu Beginn sei das Rohr verschlossen. Zur Bestimmung der Viskosität η des Glyzerins wird die Gleichgewichts-Sinkgeschwindigkeit einer Stahlkugel mit $v = 9$ cm/s gemessen (Radius $r_{\text{Kugel}} = 6$ mm, Dichte $\rho_{\text{Kugel}} = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m^3). Berechnen Sie η.

b) Nach dem Öffnen des Rohrs werde der Pegel des Glyzerins durch ständiges Zufüllen von $I = 3.7$ cm^3/s (Flüssigkeitsstrom) konstant gehalten. Berechnen Sie unter Annahme laminarer Strömung im Rohr die Höhe h des Fasses.

c) Wie groß ist die mittlere Glyzeringeschwindigkeit im Rohr?

d) Die Zufuhr von Glyzerin werde gestoppt. Nach welche Zeit ist das Fass halb leer?

Lösung:

a) Bei Stokesscher Reibung ist das Kräftegleichgewicht gegeben durch

$$(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Gl}}) V_{\text{Kugel}} g = 6\pi\eta r_{\text{Kugel}} v.$$

Damit ist die Viskosität η von Glyzerin

$$\underline{\underline{\eta = \frac{2r_{\text{Kugel}}^2 g}{9v}(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Gl}}) = 0.357 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}}}$$

b) Der Strom im Rohr wird durch das Hagen-Poiseullische Gesetz beschrieben

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi r^4}\dot{V} = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I$$

Der Druckunterschied ist durch $\Delta p = \rho_{\text{Gl}} g h$ gegeben.

Die Höhe h des Fasses beträgt also

$$\underline{\underline{h = \frac{8\eta L}{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4} I = 0.304 \text{ m.}}}$$

c) Die mittlere Glyzeringeschwindigkeit im Rohr ist

$$\underline{\underline{\bar{v} = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi r^2} = 4.71 \text{ cm/s.}}}$$

d) Der Flüssigkeitsstrom im Rohr wird beschrieben durch

$$I(t) = \frac{h(t)\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^2}{8\eta L}.$$

Dieser muss gleich dem Flüssigkeitsstrom im Fass sein $I_{\mathrm{Rohr}} = I_{\mathrm{Fass}} = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t A_{\mathrm{Fass}}$. Daraus ergibt sich eine DGL für die Höhe h des Flüssigkeitsspiegels

$$\dot{h}(t) = -\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} h(t).$$

Ihre Lösung ist

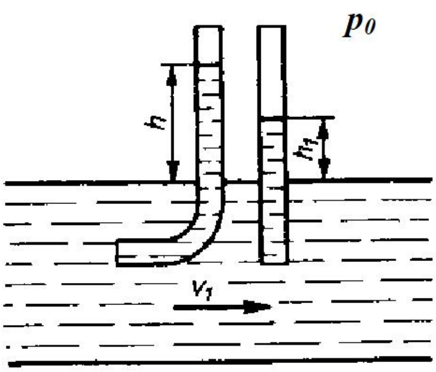
$$h(t) = h_0 \exp\left(-\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} \cdot t\right),$$

wobei $h_0 = h(0) = 0.304$ m ist. Das Fass ist also halbleer wenn gilt

$$\frac{h_0}{2} = h_0 \exp\left(-\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} \cdot T_{1/2}\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{T_{1/2} = \ln 2 \cdot \frac{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L}{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4} = 44781 \text{ s.}}}$$

12. Dynamischer Druck (*)

Zur Messung des dynamischen Drucks wird ein rechtwinklig gebogenes und ein gerades Rohr in strömendes Wasser getaucht (s. Abbildung).



a) Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem gekrümmten Rohr auf, wenn sie in einem an gleicher Stelle eingetauchten geraden Rohr eine Steighöhe $h_1 = 10$ cm erreicht und wenn die Strömungsgeschwindigkeit an der gegebenen Stelle gleich $v_1 = 1.4$ m/s ist? Wie groß ist demnach der dynamische Druck im Wasser?

b) Geben Sie den statischen und den Gesamtdruck im Wasser an, wenn der Umgebungsdruck $p_0 = 1013$ mbar ist.

Lösung:

a) Mit der Bernoulli Gleichung gilt für das gekrümmte Rohr

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h + p_0.$$

Im geraden Rohr gilt

$$p_1 = \rho g h + p_0.$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, so kann man die gesuchte Höhe h berechnen

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g(h - h_1) \;\Rightarrow\; h = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = 20.0 \text{ cm}$$

Der Dynamische Druck ist

$$\underline{\underline{p_{\text{dyn}} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 = 980 \text{ Pa.}}}$$

b) Der statische Druck ist

$$\underline{\underline{p_{\text{stat}} = \rho g h_1 + p_0 = 1.023 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}}$$

Der Gesamtdruck

$$\underline{\underline{p_{\text{ges}} = p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}} = 1.033 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}}$$