Ferienkurs Experimentalphysik 1
2010

Übung 2 - Musterlösung

1. Zentraler elastischer Stoss zwischen zwei Punktmassen (*)

1. Ein Teilchen der Masse m stösst mit einem Teilchen der Masse $3m$ in einer Dimension. Vor dem Stoss hat im Laborsystem das Teilchen 1 den Impuls p_1, das Teilchen 2 den Impuls p_2. Wie sind die Impulse nach dem Stoss?
2. Wo befindet sich der Schwerpunkt der Massen und mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich?
3. Betrachten Sie den Stoss im Schwerpunktsystem. Welche Energie überträgt Teilchen 1 auf Teilchen 2 *im Laborsystem*? Vergleichen Sie diese Energie mit der anfänglichen kinetischen Energie des ersten Teilchens *im Laborsystem*.

Lösung:
1. Nach den Formeln aus der Vorlesung sind

$$p_1' = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \tag{1}$$

$$p_2' = \frac{1}{2}(p_2 + 3p_1) \tag{2}$$

2. Der Schwerpunktsimpuls ist die Summe der Impulse

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{3}$$

Seine Geschwindigkeit ist dann

$$\dot{R} = \frac{p_1 + p_2}{4m} \tag{4}$$

Der Ort des Schwerpunktes ist mit dem Abstand $\Delta x = x_2 - x_1$

$$R = x_1 + \frac{3m\Delta x}{4m} = x_1 + \frac{3}{4}\Delta x \tag{5}$$

Die Zeitableitung davon ist

$$\dot{R} = \dot{x}_1 - \frac{3}{4}\dot{x}_1 + \frac{3}{4}\dot{x}_2 = \frac{1}{4}\dot{x}_1 + \frac{3}{4}\dot{x}_2 = \frac{m\dot{x}_1 + 3m\dot{x}_2}{4m} = \frac{p_1 + p_2}{4m} \tag{6}$$

Die beiden Ergebnisse stimmen also überein.
3. Im Schwerpunktsystem hat das erste Teilchen den Impuls

$$p_{1S} = m(\dot{x}_1 - \dot{R}) = \frac{3}{4}(p_1 - \frac{p_2}{3}) \tag{7}$$

Da der Schwerpunktsimpuls im Schwerpunktsystem verschwindet, ist dann

$$p_{2S} = -p_{1S} \tag{8}$$

Beim Stoß kehren sie sich dann einfach um, es ist also

$$p'_{1S} = -p_{1S} = p_{2S} = -p'_{2S} \tag{9}$$

Wandelt man den Impuls wieder ins Laborsystem um, erhält man

$$p'_1 = m\dot{R} + p'_{1S} = m\dot{R} - p_{1S} = -\frac{3}{4}(p_1 - \frac{p_2}{3}) + m\frac{p_1 + p_2}{4m} = -\frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} \tag{10}$$

Dass dieses mit dem im Laborsystem ausgerechneten Impuls übereinstimmt, kann man als Bestätigung der Rechnung verwenden.

2. Vollkommen inelastischer Stoss von Schiff und Eisberg (*)

Ein Schiff der Masse $M = 53t$ fährt mit einer Geschwindigkeit von $v = 11m/s$ zentral gegen einen Eisberg der Masse $m = 5300t$. Die Kollision verläuft vollkommen inelastisch, und der Antrieb des Schiffes kann dabei vernachlässigt werden.

1. Berechnen Sie die resultierende Geschwindigkeit und den Energieverlust ΔE im Verhältnis zur anfänglichen Energie in einem System, in dem der Eisberg anfangs ruht.

Lösung:

Hier ist die resultierende Geschwindigkeit

$$v' = \frac{53tv}{53t \cdot (1 + 100)} = \frac{v}{101} = 10.89\frac{cm}{s} \tag{11}$$

Der Energieübertrag ist dann

$$\Delta E = \frac{53t}{2}v^2 - \frac{53t \cdot 101}{2}\left(\frac{v}{101}\right)^2 = \frac{53t}{2}v^2 \cdot (1 - \frac{1}{101}) \tag{12}$$

In der Kollision wird also

$$1 - \frac{1}{101} = 99.0\% \tag{13}$$

der ursprünglichen kinetischen Energie in Verformungs-, Wärme-, etc. Arbeit umgewandelt.

2. Beim Stoß wird das Schiff um 20 m verkürzt. Berechnen Sie die Aufprallzeit, wenn die Deformation mit einer Geschwindigkeit von $\overline{v} = \frac{1}{2}v$ geschieht.

Lösung: Die Deformation geschieht mit der Geschwindigkeit

$$\overline{v} = 5.5\frac{m}{s} \tag{14}$$

Die Deformationszeit ist dann die Zeit, in der das Schiff die Länge $l = 20m$ mit dieser

Geschwindigkeit zusammenstaucht, also

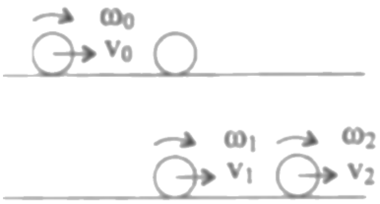
$$t = \frac{l}{v} = 3.63s \tag{15}$$

3. Welcher mittleren Beschleunigung entspricht dies für die Menschen auf dem Schiff?
Lösung: Die mittlere Beschleunigung ergibt sich aus dem Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten des Schiffes vorher und nachher und der Zeit, in der es derart abgebremst wurde:

$$a = v\frac{v - \frac{v}{101}}{2l} = 2.99\frac{m}{s^2} \tag{16}$$

3. Rollende, stossende Zylinder (***)

1. Ein homogener Zylinder von Radius r und Masse m rollte eine Rampe der Höhe h herunter. Berechnen Sie seine Geschwindigkeit am Fuss der Rampe. (Das Trägheitsmoment des Zylinders sei $I = \frac{mr^2}{2}$.)



Lösung: Die kinetische Energie eines rollenden Zylinders ist

$$E_{kin} = \frac{I/r^2 + M}{2}v^2 = \frac{3m}{4}v^2 \tag{17}$$

Er verliert durch das Abrollen an der Rampe potentielle Energie $\Delta E_{pot} = mgh$. Die Zunahme an kinetischer Energie ist die Selbe. Daraus erhält man

$$v_0 = \sqrt{\frac{4mgh}{3m}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{18}$$

2. Der selbe Zylinder rollt nun auf der Ebene. Er stösst elastisch mit einem Zylinder der selben Masse, welcher anfangs ruhen soll. Dabei findet zwischen den Zylindern keine Reibung statt. Wie sind die Geschwindigkeiten und Rotationen unmittelbar nach dem Stoss? (Die Rollbedingung ist dabei nicht mehr erfüllt!)
Lösung: Da keine Reibung zwischen den Zylindern stattfindet, kann man den Stoß wie den Stoß von zwei Punktmassen betrachten. Aus der Vorlesung wissen wir, dass gleichmassige Teilchen beim Stoß ihre Impulse vertauschen. Deswegen gilt

$$v_1 = 0, v_2 = v_0 \tag{19}$$

Die Drehung der Zylinder bleibt völlig unbeeinflusst:

$$\omega_1 = \omega_0 = \frac{v_0}{r}, \omega_2 = 0 \tag{20}$$

Die Winkelgeschwindigkeit kommt daher, dass der Körper ja vor dem Stoß ohne zu Rutschen rollen soll.
3. Bestimmen Sie nun allgemein das Verhältnis von Rotationsbeschleunigung zu Translationsbeschleunigung eines Zylinders, wenn eine Kraft am Auflagepunkt parallel zur Unterlage angreift.
Lösung: In der Rollbedingung haben wir die Drehachse in die Bildebene hinein zeigend gewählt. Deswegen erzeugt eine Kraft, die am Auflagepunkt nach *rechts* zeigt, ein *negatives* Drehmoment

$$D = -Fr = I\dot{\omega} \tag{21}$$

Die Schwerpunktsbeschleunigung welche durch die selbe Kraft hervorgerufen wird ist

$$F = m\dot{v} \tag{22}$$

Das Verhältnis ist also

$$\frac{\dot{v}}{\dot{\omega}} = -\frac{F/m}{Fr/I} = -\frac{I}{mr} = -\frac{r}{2} \tag{23}$$

4. Nach einiger Zeit ist für beide Zylinder die Rollbedingung wieder erfüllt. Für welche Geschwindigkeiten der Zylinder ist dies der Fall? (Verwenden Sie dazu die Aufgabe c).)
Lösung:
Die Motivation zur vorigen Aufgabe war natürlich, die Auswirkung von Reibung, welche ja tangential am Auflagepunkt angreift. Die Rollbedingung ist erfüllt für

$$v' = r\omega' \tag{24}$$

Wir suchen eine Winkelgeschwindigkeit ω' und Geschwindigkeit v', so dass die Rollbedingung wieder erfüllt ist. Dabei müssen die Differenzen zum Anfangszustand mit der in 3. hergeleiteten Bedingung zusammenhängen:

$$(v' - v) = -\frac{r}{2}(\omega' - \omega) \tag{25}$$

Mit der Rollbedingung eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned}
(r\omega' - v) &= -\frac{r}{2}(\omega' - \omega) && (26)\\
\frac{3}{2}r\omega' &= v + \frac{r}{2}\omega && (27)\\
\omega' &= \frac{2v}{3r} + \frac{\omega}{3} && (28)
\end{aligned}$$

Wir erwarten, dass der erste Zylinder sich solange beschleunigt und dabei seine Rotation verlangsamt, bis die Rollbedingung wieder erfüllt ist. Der zweite Zylinder hingegegen muss seine Geschwindigkeit verringern und sich dabei in Rotation versetzen. Mit der

Gleichung und den Anfangsbedingungen ist

$$\omega_1' = \frac{\omega_0}{3}, \omega_2' = \frac{2}{3r} v_0 = \frac{2}{3}\omega_0 \tag{29}$$

Die zugehörigen Geschwindigkeiten sind

$$v_1' = \frac{v_0}{3}, v_2' = \frac{2v_0}{3} \tag{30}$$

Zusammen mit den gleichen Massen und Trägheitsmomenten kann man hier die Impuls- und Drehimpulserhaltung beobachten.

4. Fußball mit starren Körpern (***)

1. Betrachten Sie einen Fußball vom Radius R und der Masse m, welchen Sie hier als Hohlkugel des Trägheitsmoments $I = \frac{2}{3}mR^2$ nähern dürfen. Der Ball liegt auf einer waagrechten Ebene ohne Reibung. Ihm wird ein waagrechter Stoß bei der Höhe h über dem Äquator erteilt; dies kann als Kraftwirkung gesehen werden, die auf beliebig kurze Zeitspanne konzentriert ist, wobei das Zeitintegral darüber ein Impuls p ist. Für welche Höhe führt der Ball eine Rollbewegung aus?

Lösung:

Der Vorgang wird als Stoß (eine zeitlich konzentrierte Kraftwirkung) betrachtet, bei dem sowohl Impuls als auch Drehimpuls auf den Ball übertragen werden. Der stoßende Fuß hat den Impuls $\vec{p}$; dann ist sein Drehimpuls am Kontaktpunkt

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = hp \tag{31}$$

Nach dem Stoß muss die Rollbedingung gelten:

$$\begin{aligned}
v &= R\omega && (32)\\
\frac{p}{m} &= R\frac{L}{I} && (33)\\
\frac{p}{m} &= R\frac{hp}{I} && (34)\\
\frac{I}{Rm} &= h && (35)\\
& && (36)
\end{aligned}$$

Mit dem Trägheitsmoment eingesetzt ergibt sich

$$h = \frac{2}{3}R \tag{37}$$

2. Nun wird der Ball auf dem Äquator senkrecht angestoßen. Welche Schwerpunkts- und Rotationsgeschwindigkeit hat er direkt nach dem Stoß?

Lösung: Der Impuls p wurde auf den Ball übertragen, er führt deshalb eine Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit $v_0 = \frac{p}{m}$ aus. Da er auf den Äquator, also in

Linie mit dem Schwerpunkt gestoßen wird, wird dabei kein Drehimpuls übertragen, die Winkelgeschwindigkeit des Balls ist also 0.
3. Wie ändern sich diese mit der Zeit, wenn zwischen Ball und Boden eine Gleitreibung mit dem Koeffizienten μ wirkt?
Lösung: Die Gleitreibung wirkt am Auflagepunkt entgegen der Bewegungsrichtung und mit der Größe

$$F_R = \mu F_N = \mu m g \tag{38}$$

Diese erzeugt ein Drehmoment, dass die Gleit- in eine Rollbewegung übergehen lässt, und wirkt natürlich auch auf die Translation des Balls. Die beiden Gleichungen, welche die Bewegung beschreiben sind also

$$\begin{aligned} RF_R &= I\dot{\omega} && (39)\\ R\mu m g &= \frac{2}{3}mR^2\dot{\omega} && (40)\\ \frac{3\mu g}{2R} &= \dot{\omega} && (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -F_R && (42)\\ \dot{v} &= -\mu g && (43) \end{aligned}$$

Dabei wurden die Vorzeichen so gewählt, dass die Rotation ihre positive Richtung gemäß der Rollbedingung hat.
4. Wann setzt für den Ball eine reine Rollbewegung ein? Berechnen Sie die Zeit für $p = 9kgm/s$ und $\mu = 0.4$.
Lösung: Das obige Gleichungssystem wird gelöst für die Anfangsbedingungen $v(0) = v_0$ und $\omega(0) = 0$. Da die Gleitreibung geschwindigkeitsunabgängig ist, ist die Lösung recht einfach:

$$v(t) = v_0 - \mu g t \tag{44}$$

$$\omega(t) = \frac{3\mu g}{2R} t \tag{45}$$

Für eine bestimmt Zeit t' wird dann gelten $v(t') = R\omega(t')$, also eingesetzt

$$\begin{aligned} v_0 - \mu g t' &= \frac{3}{2}\mu g t' && (46)\\ v_0 &= 5\mu g t' && (47)\\ & && (48) \end{aligned}$$

Das gesuchte t' ist also tatsächlich eine positive Zeit nach dem Stoß (sonst wäre das Ergebnis nicht sinnvoll!), und

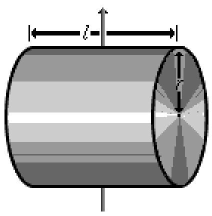
$$t' = \frac{v_0}{5\mu g} = 2.3s \tag{49}$$

Nach dieser Zeit ist der Ball in eine reine Rollbewegung übergegangen. Da sich der Auflagepunkt dann nicht mehr bewegt, verschwindet dann auch die Gleitreibung. Dieser

Vorgang kann beobachtet sehr plötzlich wirken, was diesen Rechnungen zufolge jedoch eine Täuschung ist.

5. Trägheitsmomente (**)

Berechnen Sie das Trägheitsmoment von 1. Einem homogenen Vollzylinder (Masse m, Radius R, Länge l) für Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt <u>senkrecht</u> zur Symmetrieachse (Hinweis: $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \cos^2\phi = \pi$)



Lösung: Der Zylinder wird in Zylinderkoordinaten parametrisiert; dann ist $dV = rdrd\phi dz$. Der Schwerpunkt wird in den Ursprung gelegt. Der Abstand eines Punktes im Zylinder zur Achse dann

$$d = \sqrt{z^2 + r^2\cos^2\phi} \tag{50}$$

In die Definition des Trägheitsmomentes eingesetzt ergibt das das Integral

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{-l/2}^{l/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \mathrm{d}r \, r\rho(z^2 + r^2\cos^2\phi) && (51)\\
&= \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \mathrm{d}r \, r\rho(\frac{1}{3}(\frac{l^3}{8} - \frac{-l^3}{8}) + lr^2\cos^2\phi) && (52)\\
&= \frac{l^3}{12}\rho\frac{1}{2}R^2 2\pi + \frac{1}{4}R^4 l\rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \cos^2\phi) && (53)
\end{aligned}$$

Das Integral von $\cos^2\phi$ über die gesamte Periode ist π.

$$I = \frac{l^3}{12}\pi R^2\rho + l\rho\frac{1}{4}R^4\pi \tag{54}$$

Mit der Massendichte $\rho = \frac{m}{l\pi R^2}$ eingesetzt ergibt sich

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4} \tag{55}$$

2. Einer Kugelhantel, aufgebaut aus einem Zylinder wie oben und zwei Kugeln der Radien r und Massen M am Ende für die Drehung um eine Achse durch den Schwerpunkt und senkrecht zur Symmetrieachse. Das Trägheitsmoment einer Vollkugel sei $\frac{2}{5}Mr^2$.

Lösung: Das gesamte Trägheitsmoment kann man aus einzelnen Trägheitsmomenten zusammensetzen:

- Zuerst das des Zylinders; es ist wie oben $I_{Zyl} = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$.
- Dann das der Kugeln. Gemäß dem Satz von Steiner erhalten diese zusätzlich zu dem angegebenen Trägheitsmoment einen Summanden wie Md^2, wobei d die Entfernung des Kugelschwerpunktes von der Drehachse ist: $I_{Kugel} = \frac{2}{5}Mr^2 + M(\frac{l}{2}+r)^2$.

Zusammen ist das dann also

$$I_{ges} = I_{Zyl} + \frac{4}{5}Mr^2 + M(\frac{l^2}{2} + 2r^2 + 2lr) \tag{56}$$

3. Ein Diabolo der Masse m besteht aus zwei (dünnen) Halbkugelschalen der Radien R, die an ihren Scheitelpunkten verbunden sind. Wie ist das Trägheitsmoment für die Drehung um die Symmetrieachse? (Hinweis: $\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin^3\theta = \frac{4}{3}$).

Lösung:
Zuerst berechnet man das Trägheitsmoment einer vollen Kugel. Man verwendet Kugelkoordinaten, darin ist das Volumenelement $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, bzw das Flächenelement $dA = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Die Entfernung zur (z-) Achse ist $d = R\sin\theta$. Eingesetzt in die Definition des Trägheitsmomentes ergibt dies

$$I = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, R^4 \sigma \sin^3\theta \tag{57}$$

Dabei ist $\sigma = \frac{m}{4\pi R^2}$ die Oberflächendichte. Mit dem gegebenen Integral und der Flächendichte eingesetzt ergibt dies

$$I = \frac{2}{3}mR^2 \tag{58}$$

Man kann sich überzeugen, dass man hier bereits fertig ist: das Diabolo kann man aus einer Kugelschale erhalten, indem man einfach eine Hälfte in z-Richtung verschiebt bzw. spiegelt. Eine solche Veränderung des Ortes von Masse hat aber keinen Einfluss auf das Trägheitsmoment, da man dort nur mit Abständen senkrecht zur Dreh-(z-)Achse rechnet.

6. Unwucht (**)

1. Das Schaufelrad einer Flugzeugturbine wird als homogener Vollzylinder der Masse $M = 100kg$ und des Radius $R = 1m$ vereinfacht, welcher sich um seine Symmetrieachse mit 10000 rpm dreht. Es fliegt ein Körper der Masse $m = 1kg$ senkrecht auf die Turbine zu und bleibt am äußeren Rand des Schaufelrades kleben. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit nun? Wie groß ist die Unwucht als Kraft auf die Achse, welche dadurch erzeugt wird?

Lösung: Die Kraft, die zur Abbremsung der Masse senkrecht zum Schaufelrad nötig ist, wird von der Achse aufgebracht. Dann wird die Masse in eine Drehbewegung beschleunigt, wobei die Drehimpulserhaltung beachtet werden muss:

$$I_0 omega_0 = I\omega \tag{59}$$

Dabei ist $I_0 = \frac{MR^2}{2}$ und $I = I_0 + mR^2$. Die resultierende Winkelgeschwindigkeit ist dann

$$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 \tag{60}$$

Die Zentripetalkraft, die die Achse nun zusätzlich auf die Achse ausüben muss, ist (im mitdrehenden System)

$$F = mR\omega^2 = mR\omega_0^2 \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = mR\left(\frac{MR^2/2}{MR^2/2 + mR^2}\right)^2 \omega_0^2 = 1054.0kN \tag{61}$$

2. Aus dem selben Schaufelrad wird die Hälfte entfernt. Wir gehen davon aus, dass die Turbine nun wieder auf die selbe Umdrehungszahl gebracht werden kann. Berechnen Sie hier auch die Unwucht. (Hinweis: Es mehr als einen Lösungsweg.)
Der erste Weg: Man berechnet für jedes Flächenstück die Kraft $d\vec{F}$ und integriert diese über die verbleibende Fläche auf. Diese ist (in Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dm\omega^2\vec{r} && (62)\\ &= \frac{M}{\pi R^2} dA \cdot r \left(\begin{smallmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{smallmatrix}\right) && (63)\\ &= fracM\pi R^2 drd\phi \cdot r^2 \left(\begin{smallmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{smallmatrix}\right) && (64)\end{aligned}$$

Das Integral ist dann

$$\vec{F} = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\phi\, fracM\pi R^2 drd\phi \cdot r^2 \left(\begin{smallmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{smallmatrix}\right) \tag{65}$$

Dabei hebt sich die Integration über ϕ in der ersten Komponente auf. Es ergibt sich

$$\vec{F} = \left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right) \int_0^R \mathrm{d}r\, \frac{M\omega^2}{\pi R^2} \int_0^\pi \mathrm{d}\phi\, r^2 \sin\phi \tag{66}$$

$$\vec{F} = \left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right) (1 - \cos(\pi)) \frac{M}{\pi R^2} \frac{1}{3} R^2\omega^2 \tag{67}$$

$$\vec{F} = \left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right) \frac{2MR\omega^2}{3\pi} = 23.27MN \tag{68}$$

Ein anderer Lösungsweg ist, den neuen Schwerpunkt des Rades auszurechnen und dann die Unwucht über die Entfernung der Gesamtmasse $\frac{M}{2}$ von der Drehachse auszurechenen.

Der Schwerpunkt berechnet sich aus

$$\vec{R} = \frac{2}{M}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\phi \, \frac{M}{\pi R^2} r \left(\begin{smallmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi\end{smallmatrix}\right) \tag{69}$$

$$= \vec{F}\frac{2}{M}\frac{1}{\omega^2} \tag{70}$$

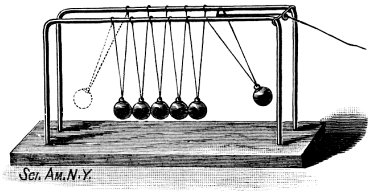
Man sieht sofort, dass die Fliehkraft einer Masse, die im Schwerpunkt liegt für Drehung um den Ursprung als

$$\vec{F} = \frac{M}{2}\vec{R}\omega^2 \tag{71}$$

das Selbe wie die andere Rechnung hervorbringt.

7. Stosspendelkette (*)

An einer Stoßendelkette sind 6 Kugeln gleicher Massen aufgehängt, so dass sie sich gerade berühren.



Eine bestimmte Anzahl von Kugeln wird angehoben und losgelassen. Der erfolgende Stoß soll als elastisch, eindimensional und zentral genähert werden. Was passiert? Warum?

Lösung:

Die selbe Anzahl von Kugeln entfernt sich auf der anderen Seite der Kette mit der selben Geschwindigkeit wie die auftreffenden Kugeln.

Beim Auftreffen haben alle n Kugeln die selbe Geschwindigkeit v. Nach Impulserhaltung gilt dann für die Geschwindigkeit v' der weggestoßenen Kugeln

$$nmv = n'mv' \tag{72}$$

Gleichzeitig gilt jedoch wegen der Energieerhaltung

$$n\frac{m}{2}v^2 = n'\frac{m}{2}v'^2 \tag{73}$$

Setzt man die Impuls- in die Energieerhaltung ein, ergibt sich

$$v = v' \tag{74}$$

Mit der Impulserhaltung wiederrum ist dann auch

$$n = n' \tag{75}$$

8. Inhomogener Zylinder (**)

Ein inhomogener Zylinder hat den Radius $R = 5cm$ und die Länge $l = 20cm$. Seine Dichte nimmt von ρ_0 im Mittelpunkt linear im Radius auf $4\rho_0$ am Rand zu.
1. Was ist das Trägheitsmoment des Zylinders? Berechnen Sie auch die Gesamtmasse und eliminieren Sie damit die Dichte im Ausdruck des Trägheitsmomentes.
Lösung: Die Dichteabhängigkeit vom Radius ist linear:

$$\rho(r) = \rho_0 + 3\rho_0 \frac{r}{R} \tag{76}$$

Das Trägheitsmoment ist das Integral

$$I = \int\limits_V \mathrm{d}V\, \rho(r) r^2 \tag{77}$$

Dabei ist in Zylinderkoordinaten $dV = rdrd\phi dz$. Mit diesem und der Dichtefunktion eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^l \mathrm{d}z \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \mathrm{d}r\, r^3 \rho_0 (1 + r\frac{3}{R}) && (78)\\
&= 2\pi l \rho_0 \int\limits_0^R \mathrm{d}r\, r^3 + r^4 \frac{3}{R}) && (79)\\
&= 2\pi l \rho_0 \left(\frac{1}{4} R^4 + \frac{1}{5} R^5 \frac{3}{R} \right) && (80)\\
&= 2\pi l \rho_0 R^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} \right) && (81)\\
&= \frac{17}{10} \rho_0 l \pi R^4 && (82)\\
&= 0.03338 kgm^2 && (83)
\end{aligned}$$

Die Gesamtmasse ist

$$\begin{aligned}
m &= \int\limits_0^l \mathrm{d}z \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \mathrm{d}r\, r \rho_0 (1 + r\frac{3}{R}) && (84)\\
&= 2\pi l \rho_0 \left(\frac{1}{2} R^2 + \frac{R^3}{3} \frac{3}{R} \right) && (85)\\
&= 3\pi l \rho_0 R^2 && (86)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$I = \frac{17}{30} m R^2 \tag{87}$$

2. Der Zylinder ruht am Anfang auf einer schiefen Ebene mit Neigung $\alpha = 30°$ zur

Horizontalen. Welche Beschleunigung entlang der Ebene erfährt er beim Herunterrollen?
Lösung: Da der Auflagepunkt zu jedem Zeitpunkt der ruhende Punkt ist, kann die Bewegung als Drehung um diesen aufgefasst werden. Die Kraft, die das Drehmoment hervorruft, ist der Teil Gewichtskraft auf den Schwerpunkt, welcher parallel zur Ebene angreift:

$$M = |\vec{M}| = Rmg\sin\alpha \tag{88}$$

Kurze Überprüfung der harmonischen Funktion: Ist $\alpha = 0$, sollte der Zylinder nicht beschleunight werden, und $\sin(0) = 0$.
Das zugehörige Trägheitsmoment ist mit dem Satz von Steiner

$$I' = I + mR^2 = \frac{47}{30}mR^2 \tag{89}$$

Mit der Bewegungsgleichung

$$M = \dot{L} = I'\dot{\omega} \tag{90}$$

und der Rollbedingung

$$\ddot{s} = R\dot{\omega} \tag{91}$$

ergibt sich für die Beschleunigung entlang der Ebene

$$\ddot{s} = R\dot{\omega} = R\frac{M}{I'} = R\frac{Rmg\sin\alpha}{I} = \frac{30}{47}g\sin\alpha \tag{92}$$

9. Hockey (**)

Ein ruhender Eishockeypuck von einem zweitem der gleichen Masse getroffen, der vor dem Stoß die Geschwindigkeit $v = 40\frac{m}{s}$ hat. Nach dem Stoß ist dieser um den Winkel $\theta_A = 45°$ abgelenkt, der Ruhende gleitet im Winkel $\theta_B = -30°$ fort.
1. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten u und w der Pucks nach dem Stoß.
Lösung: Nach Impulserhaltung muss der Impuls des ersten Pucks in seiner Richtung erhalten bleiben:

$$v = u\cos(45°) + w\cos(-30°) = \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}w}{2} \tag{93}$$

Die Impulse senkrecht dazu müssen sich zu 0 addieren:

$$0 = u\sin(45°) + w\sin(-30°) = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{w}{2} \tag{94}$$

Ineinander eingesetzt ergeben die Gleichungen

$$u = \frac{\sqrt{2}v}{1+\sqrt{3}}, w = \frac{2v}{1+\sqrt{3}} \tag{95}$$

2. War der Stoß elastisch? Warum? Wie groß ist für einen nichtelastischen Stoß der relative Verlust an kinetischer Energie im Vergleich zur Energie vor dem Stoß?
Lösung: Weist man den beiden Pucks die Massen m zu, ergibt sich für den Unterschied

zwischen Gesamtenergie vor und nach dem Stoß:

$$\Delta E = \frac{m}{2}\left(v^2 - u^2 - w^2\right) \tag{96}$$

$$= \frac{m}{2}\left(v^2 - \frac{2v^2}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{4v^2}{(1+\sqrt{3})^2}\right) \tag{97}$$

$$= \frac{m}{2}v^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{2}}\right) \tag{98}$$

Der Verlust ist also $\Delta E \approx \frac{m}{2}v^2 0.19$, weswegen der Stoß nach Definition nicht elastisch sein kann.