Ferienkurs Experimentalphysik 1
2010

Übung 1 - Musterlösung

1. Sprungschanze

1. Die maximale Höhe nach Verlassen der Sprungschanze kann über die Energieerhaltung berechnet werden, der Bezugspunkt sei im Ursprung am Absprungpunkt.

   Am Umkehrpunkt, dem Punkt der maximalen Höhe während des Fluges hat die Geschwindigkeit der Springerin keine z-Komponente. Daher gilt für die maximale Höhe h_{max}:

$$E_{Umkehrpunkt} = E_{Absprungpunkt} \tag{1}$$

$$mgh_{max} + \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mv_{Abspr}^2 = \frac{1}{2}m \cdot (v_{x,Abspr}^2 + v_{z,Abspr}^2) \tag{2}$$

   Laut Angabe, schließt die Geschwindigkeit der Springerin im Zeitpunkt des Absprungs einen Winkel von $\alpha = 25°$ mit der Horizontalen ein. Damit gilt für die maximale Höhe:

$$h_{max} = \frac{1}{2g}v_{z,Abspr}^2 = \frac{1}{2g}\sin^2\alpha \cdot v_{Abspr}^2 \tag{3}$$

   Der Betrag der Geschwindigkeit am Absprungpunkt lässt sich auch aus der Energieerhaltung berechnen:

$$E_{Start} = E_{pot,Start} + E_{kin,Start} = mgh_{Start} \tag{4}$$

   Diese Energie wird durch die Erdbeschleunigung bis zum Absprungpunkt vollständig in kinetische Energie umgewandelt:

$$E_{Abspr} = E_{pot,Abspr} + E_{kin,Abspr} = \frac{1}{2}mv_{Abspr}^2 = E_{Start} \tag{5}$$

   Daraus kann man schließlich die maximale Höhe berechnen:

$$\text{aus (4):} \qquad \frac{1}{2}v_{Abspr} = \frac{1}{m}E_{Start} = gh_{Start} \tag{6}$$

$$\text{und damit:} \qquad h_{max} = \frac{1}{g}sin^2\alpha \cdot gh_{Start} = \sin^2\alpha h_{Start} = 3,57m \tag{7}$$

2. Um die Weite zu berechnen verwendet man, dass man die beiden, senkrecht zueinander stehenden, Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_z getrennt behandeln kann. Die Weite ist also:

$$s = v_x \cdot T = v \cdot \cos\alpha \cdot T \tag{8}$$

Man benötigt also die Flugdauer T. Diese ist die Zeit, die die Springerin benötigt um vom Absprungpunkt wieder bei $z = 0$ zu landen. Die z-Komponente in Abhängigkeit von der Zeit kann man durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit der Bewegungsgleichung für die z-Richtung berechnen:

$$m\ddot{z} = -mg \tag{9}$$

Da die Gravitationskraft unabhängig von der Zeit ist, sind die beiden Integrale leicht zu berechnen und es ergibt sich mit $v_z(0) = v_{0,z}$ und $z(0) = 0$:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,z}t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t \tag{10}$$

Die Flugdauer T ist also:

$$z(T) = -\frac{1}{2}gT^2 + v_{0,z}T \stackrel{!}{=} 0 \tag{11}$$

$$T = \frac{2v_{0,z}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \tag{12}$$

Damit beträgt die Weite s:

$$s = \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \frac{2v^2}{g} = 4\cos\alpha \cdot \sin\alpha h_{Start} = 30,64m \tag{13}$$

3. Man sieht, dass in 1. und 2. die Masse der Springerin keine Rolle gespielt hat. Darum fliegt ihr Freund genauso weit und hoch wie sie.

2. Schräger Wurf mit Stokesscher Reibung

1. Die auf das Teilchen wirkenden Kräfte sind die konstante Gewichtskraft $\vec{F}_G = -mg\hat{e}_z$ und die geschwindigkeitsabhängige Luftwiderstandskraft $\vec{F}_R = -\sigma\dot{\vec{r}}$. Damit lautet die vektorielle Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{F}_R = -mg\hat{e}_z + -\sigma\dot{\vec{r}} \tag{14}$$

In Komponenten zerlegt:

$$m\ddot{x} = -\sigma\dot{x} \tag{15}$$

$$m\ddot{y} = -\sigma\dot{y} \tag{16}$$

$$m\ddot{z} = -\sigma\dot{z} - mg \tag{17}$$

2. Daraus kann man die Bewegungsgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z gewinnen:

$$m\dot{v}_x = -\sigma v_x \tag{18}$$
$$m\dot{v}_y = -\sigma v_y \tag{19}$$
$$m\dot{v}_z = -\sigma v_z - mg \tag{20}$$

Die ersten beiden Gleichungen kann man sofort lösen:

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-\frac{\sigma}{m}t} \tag{21}$$
$$v_y(t) = v_{y0} e^{-\frac{\sigma}{m}t} \tag{22}$$

Laut Angabe zeigt die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens in die xz-Ebene und hat den Winkel α zur Horizontalen. Das heißt

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 cos\alpha \\ 0 \\ v_0 sin\alpha \end{pmatrix} \tag{23}$$

Also $v_{x0} = v_0 \cos\alpha$ und $v_{y0} = 0$. Damit:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha e^{-\frac{\sigma}{m}t} \tag{24}$$
$$v_y(t) = 0 \tag{25}$$

Gleichung (17) ist die inhomogene lineare Differentialgleichung für die z-Komponente. Ihre Lösung ist die Summe aus der allgemeinen homogenen ($m\dot{v}_z + \sigma v_z = 0$) und einer speziellen der inhomogenen Differentialgleichung. Die Lösung der homogenen ist analog zu denen der x- und y-Komponenten:

$$v_{z,hom} = Ce^{-\frac{\sigma}{m}t} \tag{26}$$

Eine inhomogene Lösung kann man raten:

$$v_{z,inh} = -\frac{mg}{\sigma} \tag{27}$$

Also

$$v_z(t) = Ce^{-\frac{\sigma}{m}t} - \frac{mg}{\sigma} \tag{28}$$

Um die Integrationskonstante C zu ermitteln setzt man in Gleichung (23) die Anfangsbedingung $v_z(0) = v_{z0}$ ein. Damit erhält man letztendlich für $v_z(t)$:

$$v_z(t) = v_0 \sin\alpha e^{-\frac{\sigma}{m}t} - \frac{mg}{\sigma}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{m}t}\right) \tag{29}$$

3. Die Bahnkurve erhält man aus der Geschwindigkeit über die Integration nach t und der Anfangsbedingung $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' v_0 \cos\alpha e^{-\frac{\sigma}{m}'} = \frac{m v_0 \cos\alpha}{\sigma}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{m}t}\right) \tag{30}$$

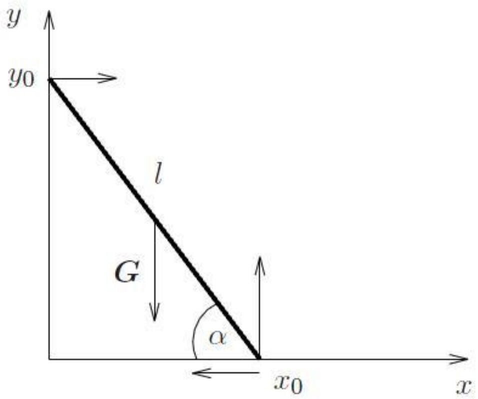
$$y(t) = y_0 = 0 \tag{31}$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t dt' \left(v_0 \sin\alpha e^{-\frac{\sigma}{m}t'} - \frac{mg}{\sigma}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{m}'}\right)\right) \tag{32}$$

$$= \left(\frac{m v_0 \sin\alpha}{\sigma} + \frac{m^2 g}{\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{m}t}\right) - \frac{mg}{\sigma}t \tag{33}$$

3. Leiter an einer Wand

Auf die Leiter wirken drei Kräfte: Die Gewichtskraft $\vec{G}$ (die wir uns bei einer homogenen Leiter im Mittelpunkt angreifend denken können) und die Kräfte, die Boden bzw. Wand auf die Endpunkte der Leiter ausüben. Die Wandkraft $\vec{F_1}$ zeigt aufgrund der Voraussetzung einer rutschigen Wand senkrecht zur Wand, die Bodenkraft $\vec{F_2}$ hat sowohl eine Horizontal- als auch eine Vertikalkomponente, so wie in der Abbildung angedeutet.



Die Angriffspunkte der Kräfte sind

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_M = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\cos\alpha \\ \frac{l}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Damit die Leiter sich nicht in Bewegung setzt, muss sowohl das Gesamtdrehmoment (wir wählen den Ursprung als Bezugspunkt) als auch die Gesamtkraft verschwinden. Das bedeutet:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_M \times \vec{G} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \tag{35}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ l\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{1x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\cos\alpha \\ \frac{l}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$= -lF_{1x}\sin\alpha\hat{e}_z - \frac{l}{2}mg\cos\alpha\hat{e}_z + lF_{2y}\cos\alpha\hat{e}_z \stackrel{!}{=} 0 \tag{37}$$

Aus der Bedingung, dass die Gesamtkraft verschwinden muss:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \tag{38}$$

folgt, $F_{2y} = mg$ und $F_{2x} = -F_{1x}$ ist. Damit ergibt sich aus der Drehmomentbedingung die gesuchte Wandkraft F_{1x}:

$$F_{1x} = \frac{G}{2\tan\alpha} \tag{39}$$

Das scheint plausibel: Für $\alpha = 90°$ ist $F_{1x} = 0$, wie man es erwartet. Die Kraft, die die Leiter auf die Wand ausübt, ist natürlich genau die Gegenkraft, also

$$\vec{F}_W = -\frac{G}{2tan\alpha}\hat{e}_x \tag{40}$$

Die Kraft mit der der Boden das Wegrutschen der Leiter verhindert, ist die Horizontalkomponente von $\vec{F}_2$, also

$$\vec{F}_B = \frac{G}{2\tan\alpha}\hat{e}_x \tag{41}$$

4. Kurvenabschnitt einer Straße

Um die Erfüllung beider Vorgaben zu garantieren muss einerseits die Kraft parallel zur Straße auf ein stehendes Auto verschwinden und nötige Zentripetalkraft aufgebracht werden.

1. Auf ein stehendes Auto auf einer schrägen Ebene wirken die Gewichtskraft in -z Richtung, die Normalkraft senkrecht zur Ebene und die Haftreibungskraft entlang der Ebene entgegen der Zugkraft, also der Hangabtriebskraft. Die Bedingung, dass die Kraft parallel zur Ebene verschwinden muss führt also zu:

$$mg \cdot \sin\alpha = \mu_H \cdot F_N = mg\mu_H \cdot \cos\alpha \tag{42}$$

Dabei wurde die maximal mögliche Haftreibungskraft eingesetzt. Für den Winkel α folgt:

$$tan\alpha = \mu_H \Rightarrow \alpha = arctan(\mu_H) = 4,57^\circ \tag{43}$$

2. Um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten, muss man ihn in Richtung Kreismittelpunkt beschleunigen. Im vorliegenden Fall muss nur die Komponente der Zentripetalkraft parallel zur Ebene aufgebracht werden. Ohne Reibung ist die einzige Kraft parallel zur Ebene die sogenannte Hangabtriebskraft. Damit ist die Bedingung an den Radius r:

$$F_Z \cdot \cos\alpha \leq F_G \cdot \sin\alpha \tag{44}$$

$$\frac{mv^2}{r} \cdot \cos\alpha \leq mg\sin\alpha \tag{45}$$

$$\Rightarrow r \geq \frac{v^2}{g\tan\alpha} = 353.9m \tag{46}$$

Die Haftreibung wirkt erst sobald der Körper schneller oder langsamer als 60km/h fährt. Sie wirkt solange der nach außen (schneller als 60km/h)/ nach innen (langsamer als 60km/h) gerichteten Kraft entgegen bis der maximale Wert $F_{H,max} = \mu_H \cdot F_N$ erreicht ist. Übersteigt die Kraft diesen Wert beginnt das Auto nach außen bzw. nach innen zu rutschen.

5. Spannung und Drehimpuls

1. Die Spannung T in der Schnur ist genau die Zentripetalkraft also

$$T = \frac{mv_0^2}{R_0} \tag{47}$$

2. Der Ursprung befinde sich im Kreismittelpunkt, der Drehimpuls der Masse ist $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Da Geschwindigkeit und Ortsvektor senkrecht zueinander stehen, lässt sich der Betrag des Drehimpulses über das gewöhnliche Produkt berechnen und seine Richtung über die rechte-Hand-Regel:

$$\vec{L} = mR_0v_0\hat{e}_z \tag{48}$$

Wobei die z-Achse senkrecht auf der Ebene stehen soll, und die positive Richtung so gewählt ist, dass sie parallel zur Winkelgeschwindigkeit der Masse ist.

3. Die kinetische Energie ist einfach zu berechnen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{49}$$

4. Die Kraft $\vec{F}$ die nötig ist um den Radius der Kreisbahn zu halbieren verläuft parallel zum Ortsvektor $\vec{r}$. Dadurch gibt es kein Drehmoment, der Drehimpuls bleibt also erhalten.

$$\vec{L}_{R_0} = \vec{L}_{\frac{R_0}{2}} \tag{50}$$

$$mR_0v_0\hat{e}_z = mr'v'\hat{e}_z = m\frac{R_0}{2}v'\hat{e}_z \tag{51}$$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit nun $v' = 2v_0$ beträgt. Die kinetische Energie hat sich also vervierfacht:

$$E'_{kin} = \frac{1}{2}mv'^2 = 2mv_0^2 = 4E_{kin} \tag{52}$$

Die Energie der Masse bleibt hier nicht erhalten, da durch das verkürzen des Radius Kraft aufgewendet werden muss. Es wird Arbeit geleistet, die in der kinetischen Energie der Masse gespeichert wird.

6. Rotierende Masse am Faden

1. Bei horizontaler Bewegung ist die nach außen wirkende Zentrifugalkraft bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω konstant.

$$F_{Zf} = m\omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_{Zf}}{mr}} \tag{53}$$

Die Winkelgeschwindigkeit, bei der der Faden reißt, ist die bei der die Zentrifugelkraft $F_{Zf} > 1000N$.

$$\omega_{max} = 14,14s^{-1} \tag{54}$$

2. Rotiert der Körper um eine horizontale Achse im Schwerefeld der Erde, so ist ω nicht konstant. Die Tangentialbeschleunigung ist

$$a_t = g\sin\varphi(t) \tag{55}$$

wobei φ der Winkel zwischen Radiusvektor und z-Achse ist. Die Winkelgeschwindigkeit ist dann

$$\omega = \omega_0 + \frac{g}{r}\int_0^t \sin\varphi(t')dt' \quad (56)$$

Die maximale Winkelgeschwindigkeit wird am unteren Punkt erreicht, wobei $\omega_0 = \omega(\varphi = 0)$ die Winkelgeschwindigkeit am oberen Punkt der Bahn ist. Der maximale Wert ω_{max} wird für $\varphi = \pi$ zur Zeit $t = T$ im unteren Punkt der Bahn erreicht. Es gilt:

$$\omega_{max} = \omega_0 + \frac{g}{r}\int_0^T sin\varphi(t')dt' = \omega_0 + \frac{g}{r}\int_0^\pi \frac{sin\varphi}{\dot{\varphi}}d\varphi = \omega_0 + \frac{g}{r}\cdot\frac{\cos\varphi}{\dot{\varphi}}|_\pi^0 \quad (57)$$

Mit $\dot{\varphi} = \omega$ ergibt sich dann:

$$\omega_{max} = \omega_0 + \frac{g}{r\cdot\omega_0} + \frac{g}{r\cdot\omega_{max}} \quad (58)$$

$$\omega_{max} = \frac{1}{2r}\left(r\cdot\omega_0 + \frac{g}{\omega_0}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \frac{8g}{r} + \frac{g^2}{r^2\omega_0^2}} \quad (59)$$

Die größte Kraft auf den Faden tritt im unteren Punkt auf. Die Bedingung, dass der Faden nicht reißt, ist dann:

$$F = m\omega_{max}^2\cdot r + mg = 1000N \quad (60)$$

$$\Rightarrow \omega_{max} = 13,8s^{-1} \quad (61)$$

Die maximal zulässige Winkelgeschwindigkeit ω_0 an oberen Punkt erhält man entweder aus Gleichung(58) oder einfacher aus dem Energiesatz:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 - 2mgr\text{mit}v = r\cdot\omega \quad (62)$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt $\omega_0 = 12,3s^{-1}$.
Der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit v_{min} im oberen Punkt und v_{max} im unteren Punkt ist:

$$\frac{v_{min}^2}{2} + 2rg = \frac{v_{max}^2}{2} \Rightarrow \omega_{max}^2 - \omega_{min}^2 = \frac{4g}{r} \quad (63)$$

7. Pendel

Damit die Masse einen Umlauf um den Nagel ausführt muss zu jedem Zeitpunkt die Schnur gespannt sein. Das heißt die Zentrifugalkraft muss größer sein, als die Komponente der Gewichtskraft in Richtung Nagel. Am größten ist diese im obersten

Punkt der Umlaufbahn.
Die Bedingung lautet also

$$|F_{Zf}| > |F_G| \tag{64}$$
$$\frac{Mv^2}{r} > Mg \tag{65}$$
$$\Rightarrow v^2 > g \cdot r \tag{66}$$

Die Geschwindigkeit der Masse im höchsten Punkt kann man mit der Energieerhaltung ermitteln. Wobei als Bezugspunkt der potentiellen Energie der unterste Punkt der Schwingung gewählt wird.

$$E_{Start} = E_{unten} = E_{oben} \tag{67}$$
$$Mgl = \frac{1}{2}Mv_{unten}^2 = \frac{1}{2}Mv_{oben}^2 + 2Mgr \tag{68}$$

Damit gilt für die Geschwindigkeit am höchsten Punkt:

$$v_{oben}^2 = 2g(l - 2r) \tag{69}$$

Setzt man diese Geschwindigkeit in die Umlaufbedingung ein, so entsteht die Bedingung für die Position des Nagels:

$$gr < 2g(l - 2r) \tag{70}$$
$$5r < 2l \tag{71}$$
$$r < \frac{2}{5}l \tag{72}$$

8. Gravitation

1. Das Gravitationspotential der Erde ist gegebene durch:

$$E_{pot} = -\frac{GM_E m}{r} \tag{73}$$

Um dies in den Größen g und R_E auszudrücken, muss man sicher überlegen, woher die Erdbeschleunigung g kommt. In der Nähe der Erdoberfläche, fasst man die Gravitationskraft mit $F_G = -mg$ zusammen.

$$F_G = -\frac{d}{dr}E_{pot}(r) = -\frac{GM_E m}{r^2} =! - mg \tag{74}$$
$$\Rightarrow g = \frac{GM_E}{R_E^2} \tag{75}$$

Das Gravitationspotential einer Masse in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt ist damit:

$$E_{pot} = -\frac{gR_E^2 m}{r} \tag{76}$$

Die Bedingung für eine stabile Kreisbahn ist, dass die Gravitationskraft die Zentripetalkraft aufbringen muss, die beiden Kräfte also gleich groß sein müssen.

$$\frac{GM_E m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{77}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM_E}{r} \tag{78}$$

Die kinetische Energie auf einer stabilen Kreisbahn beträgt dann:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{GM_E m}{r} = -\frac{1}{2}E_{pot} \tag{79}$$

2. Die Fluchtgeschwindigkeit ist dann erreicht, wenn die kinetische Energie größer ist, als die potentielle Energie.

$$E_{pot} + E_{kin} > 0 \tag{80}$$

a) Der Mond befindet sich auf einer stabilen Kreisbahn, seine Geschwindigkeit beträgt, wie in 1. berechnet:

$$v^2 = \frac{GM_E}{r} \tag{81}$$

Seine kinetische Energie enspricht dann der halben potentiellen Energie. Um die Bedingung für die Flucht zu erfüllen, muss diese verdoppelt werden. Die Geschwindigkeit des Mondes müsste um den Faktor $\sqrt{2}$ größer werden.

b) Um aus dem Gravitationsfeld des Mondes herauszukommen, muss wieder die Fluchtbedingung erfällt sein. Die Fluchtgeschwindigkeit beträgt also:

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM_M}{r_M}} = 2,38km/s \tag{82}$$

9. Klotz auf rotierender Scheibe

Bei einer Radialgeschwindigkeit von $v_r, = 10m/s$ braucht der Klotz $\Delta t = 10^{-2}s$, um an den Rand der Scheibe zu gelangen. Wenn die Scheibe sich nicht dreht, würde der Klotz im Laborsystem und im System der Scheibe geradeaus gleiten mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_r, v_\varphi)$ und den Rand der Scheibe bei

$$R\varphi = \Delta t \cdot v_\varphi = 5 \cdot 10^{-2} m = 0,05 m \varphi = 0,25 \hat{=} 14,5^\circ \tag{83}$$

erreichen. Nun dreht sich die Scheibe mit $\omega = 2\pi \cdot 10 s^{-1}$, ihr Rand dreht sich in der Zeit Δt also um

$$\varphi = \omega \cdot \Delta t = 39^\circ \tag{84}$$

Bei rein radialer Geschwindigkeit des Klotzes ($v_\varphi = 0$) würde der Klotz bei $\varphi = -39^\circ$ am Rande der Scheibe ankommen. Mit $v_\varphi = 5m/s$ erreicht der Klotz den Rand bei

$$\varphi = 14,5^\circ - 39^\circ = -24,5^\circ \tag{85}$$

Während der Klotz vom Standpunkt des ruhenden Betrachters gerade aus rutscht, macht sie vom Standpunkt des sich mit der Scheibe drehenden Betrachters eine gekrümmte Bahn mit der Tangentialbeschleunigung

$$a_\varphi = 2 v_r \omega \tag{86}$$

Die Bahn auf der rotierenden Scheibe ist daher eine Parabel. Die Geschwindigkeit ist: $\vec{v} = (v_r, v_\varphi - 2 v_r \omega t)$, wobei v_r, v_φ die Geschwindigkeitskomponenten im ruhenden System sind und $v_r, v_\varphi - 2 v_r \omega t$ Werte im System der Scheibe.

10. Auto am Äquator

Die Zentrifugalkraft zeigt radial nach außen, die Corioliskraft radial nach innen, wie man leicht an den Formeln für die beiden Kräfte sehen kann:

$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \tag{87}$$
$$\vec{F}_{Zf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{88}$$

Die Geschwindigkeit, Radius und Winkelgeschwindigkeit stehen senkrecht aufeinander. Die Beträge der Kräfte kann man also mit dem gewöhnlichen Produkt berechnen:

$$F_C > F_{Zf} \tag{89}$$
$$2m\omega v_0 > m\omega^2 R_E \tag{90}$$
$$\Rightarrow v_0 > \frac{1}{2}\omega R_E \tag{91}$$

Dieser Zusammenhang ist leicht aus den Formeln für die beiden Kräfte einzusehen und war deshalb zu erwarten. ωR_E ist übrigens die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt auf dem Äquator bewegt.

11. Zentrifugal- und Corioliskraft

1. Die Beschleunigung zeigt in Richtung Drehachse der Erde. Ihr Betrag ist

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot \cos\theta R_E = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600s}\right)^2 \cdot R_E \cos\theta = 3,37\frac{cm}{s^2} \tag{92}$$

2. Durch diese Zentripetalbeschleunigung erfährt eine Masse im mitbewegten System die Zentrifugalkraft (Scheinkraft), die nach außen zeigt, und somit der Gravitationsbeschleunigung entgegen. Die Masse erscheint also „leichter“.

3. Am Äquator zeigt die Zentrifugalkraft radial nach außen, also antiparallel zur Gewichtskraft.

$$g_{\theta=0^\circ} = 9,87\frac{m}{s^2} - \omega^2 R_E = 9,83\frac{m}{s^2} \tag{93}$$

   Beim Breitengrad $\theta = 45^\circ$ ist die Zentripetalkraft nicht mehr antiparallel zur Gewichtskraft. Ihre Radialkomponente beträgt $F_{Zf,r} = F_{Zf} \cdot \cos\theta$. Damit:

$$g_{\theta=45^\circ} = 9,81\frac{m}{s^2} - \omega^2 R_E \cos^2\theta = 9,79\frac{m}{s^2} \tag{94}$$

4. Die z-Achse ist so gewählt, dass sie mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zusammenfällt. x- und y-Achse so, dass die Osten genau in y-Richtung liegt.

$$\vec{a}_{Zf} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{24\cdot3600s} \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{24\cdot3600s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_E \cos 45^\circ \\ 0 \\ R_E \sin 45^\circ \end{pmatrix}\right) \tag{95}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600s}\right)^2 R_E \cos 45^\circ \hat{e}_x = 0,024\frac{m}{s^2} \tag{96}$$

$$\vec{a}_C = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{24\cdot3600s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 7000\frac{m}{s} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{97}$$

$$= 2\frac{2\pi}{24 \cdot 3600s} \cdot 7000\frac{m}{s}\hat{e}_x = 1,018\frac{m}{s^2} \tag{98}$$