1. **Fluss durch eine Oberfläche.**

   Zeigen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x - xy^2 - \tanh z \\ 4y + x^2 y \\ (5-z)(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

   durch die Oberfläche S des Ellipsoids

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x^2 + 6y^2 + 3z^2 \leq 2010 \right\}$$

   gleich dem 7-fachen Volumen von E ist.

   Lösung.

   Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= \partial_x \left(3x - xy^2 - \tanh z\right) + \partial_y \left(4y + x^2 y\right) + \partial_z \left((5-z)(x^2 - y^2)\right) \\ &= 3 - y^2 + 4 + x^2 - (x^2 - y^2) = 7 \end{aligned}$$

   Da alle Voraussetzungen erfüllt sind, gilt nach dem Satz von Gauss-Ostrogradski

$$\int_{S=\partial E} v \cdot n \,\mathrm{d}S = \int_E \operatorname{div} v \,\mathrm{d}^3 x = \int_E 7 \,\mathrm{d}^3 x = 7 \operatorname{vol}(E). \quad \square$$

2. **Zirkulation durch den Rand einer Fläche.**

   Gegeben sei die untere Hälfte einer Sphäre

   $$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \,\wedge\, z \le 0\right\}$$

   Die Orientierung von S sei nach außen.

   Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes

   $$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cosh z - x^2 y \\ x(y^2 - z) + 1 \\ 5 - y^2 \end{pmatrix}$$

   entlang des positiv orientierten Randes ∂S von S.

   Lösung.

   Möglichkeit 1: Direkte Berechnung des Wegintegrals

   Der positiv orientierte Rand von S ist der im mathematisch negativen Sinn (im Uhrzeigersinn, Rechte-Hand-Regel!) durchlaufene Kreis mit Radius $R = 2$ in der Ebene $z = 0$:

   $$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ -R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Damit ist

   $$\begin{aligned}
   \oint_{\partial S} w(r)\cdot \mathrm{d}r &= \int_0^{2\pi} w(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\
   &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \begin{pmatrix} R^3\cos^2 t\sin t + 1 \\ R^3 \sin^2 t\cos t + 1 \\ 5 - R^2\sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\
   &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \left(-2R^4 \cos^2 t \sin^2 t - R(\sin t + \cos t)\right) \\
   &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \left(-2R^4 \cos^2 t\sin^2 t\right) - R \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \sin t}_{=0} - R \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \cos t}_{=0} \\
   &= -2R^4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \cos^2 t \sin^2 t}_{=\pi/4} = -8\pi
   \end{aligned}$$

   Möglichkeit 2: Anwendung des Satzes von Stokes

Da alle Voraussetzungen erfüllt sind, kann man die Zirkulation auch mithilfe des Satzes von Stokes berechnen. Dazu betrachtet man

$$\text{rot } w = \nabla \times w = \begin{pmatrix} \partial_y w_z - \partial_z w_y \\ \partial_z w_x - \partial_x w_z \\ \partial_x w_y - \partial_y w_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + x \\ \sinh z \\ y^2 - z + x^2 \end{pmatrix}$$

Da nun S und die Kreisscheibe

$$D := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 0\right\}$$

den selben Rand haben ($\partial S = \partial D$), nämlich die Kreislinie aus Möglichkeit 1, gilt nach dem Satz von Stokes

$$\oint_{\partial S} w(r) \cdot \mathrm{d}r = \oint_{\partial D} w(r) \cdot \mathrm{d}r = \int_D \text{rot } w \cdot n \, \mathrm{d}S$$

Dabei ist n der in negative z-Richtung (positive Orientierung des Randes, Rechte-Hand-Regel) zeigende Einheitsvektor $n = (0, 0, -1)$

$$\begin{aligned} \int_D \text{rot } w \cdot n \, \mathrm{d}S &= \int_D \begin{pmatrix} -2y + x \\ \sinh z \\ y^2 - z + x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}S \\ &= \int_D -(x^2 + y^2 - z) \, \mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \mathrm{d}r \, r(-r^2) \\ &= -2\pi \int_0^2 \mathrm{d}r \, r^3 \\ &= -8\pi \end{aligned}$$

Dabei wurde die Parametrisierung

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

für D verwendet (also $G_\psi = r$).

3. **Holomorphe Funktionen.**

Sei $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = 2xy - x^2 + y^2$.
Geben Sie eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, sodass $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert.

$$\boxed{u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy}$$

Lösung.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 2x = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \Rightarrow u(x,y) = -y^2 + 2xy + C(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2y + C'(x) = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2y \qquad \Rightarrow C'(x) = 2x, C(x) = x^2$$

Also ist letztendlich

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$$

4. **Residuenkalkül.**

Gegeben sei das reelle Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx$$

Außerdem sei γ die Kurve, die in der komplexen Ebene aus der Strecke $[0, R]$, dem Kreisbogen von R bis $Re^{i\frac{2}{3}\pi}$ und der Strecke $\left[Re^{i\frac{2}{3}\pi}, 0\right]$ besteht.

(a) Skizzieren Sie den positiv orientierten Weg γ in der komlexen Ebene!

(b) Berechnen Sie das Integral I mithilfe γ! Dokumentieren Sie dabei ausführlich die Rechenschritte.

Lösung.

Das reelle Integral wird wie immer als komplexes Integral interpretiert. Für die Polstellen ergibt sich

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad z_3 = e^{i\pi}$$

Allerdings wird hier nur z_1 vom vorgegebenen Weg eingeschlossen, also ist nur dieses Residuum relevant. Daher erhalten wir

$$\int_{[0,R]} dz \frac{z}{z^3+1} + \int_{\gamma_r} dz \frac{z}{z^3+1} + \int_{\left[Re^{i\frac{2\pi}{3}},0\right]} dz \frac{z}{z^3+1} = 2\pi i Res_{z_1} \frac{z}{z^3+1}$$

Die rechte Seite berechnet sich zu

$$2\pi i Res_{z_1} \frac{z}{z^3+1} = 2\pi i \frac{z}{3z^2}\bigg|_{z=z_1} = 2\pi i \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Den letzten Term können wir umformen, so dass, abgesehen von einem Vorfaktor, wieder der erste Term dasteht, indem man den Weg durch $z = Re^{i\frac{2\pi}{3}}s$, $s \in [0,1]$ parametrisiert:

$$\int_{\left[Re^{i\frac{2\pi}{3}},0\right]} dz \frac{z}{z^3+1} = \int_1^0 ds Re^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{sRe^{i\frac{2\pi}{3}}}{s^3R^3e^{i2\pi}+1} = -e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_0^1 ds \frac{sR}{s^3R^3+1}$$
$$= -e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_{[0,R]} dz \frac{z}{z^3+1}$$

Der mittlere Term verschwindet im Limes großer R:

$$\left| \int_{\gamma_r} dz \frac{z}{z^3+1} \right| = \left| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{iR^2e^{2i\phi}}{R^3e^{3i\phi}+1} d\phi \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{3}} d\phi \left| \frac{R^2}{R^3e^{3i\phi}+1} \right| \overset{r\to\infty}{\to} 0$$

Der Integrand kann unabhängig von R auf dem Intervall durch eine integrierbare Funktion abgeschätzt werden (in diesem Fall durch das Supremum). Daher können Limes-Bildung und Integration miteinander vertauscht werden. Der Integrand geht aber punktweise gegen 0 und somit verschwindet der Term im Grenzfall.

Es bleibt also übrig:

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{[0,R]} dz\frac{z}{z^3+1} + \int_{\gamma_r} dz\frac{z}{z^3+1} + \int_{\left[Re^{i\frac{2\pi}{3}},0\right]} dz\frac{z}{z^3+1}\right) =$$

$$= \left(1-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\int_0^\infty dx\frac{x}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Daraus folgt

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx = \frac{\frac{2\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

5. **Rechnen mit Distributionen.** Berechnen Sie die Ableitung von

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto r(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

im distributiven Sinne.

Lösung.

Für eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} r, \varphi\right) &:= -\left(r, \frac{d}{dx}\varphi\right) = -\int_{\mathbb{R}} r(x) \, \frac{d}{dx}\varphi(x) \, dx = -\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\varphi(x) \, dx \\ &= -\left[\varphi(x)\right]_{-1}^{+1} = -\varphi(1) + \varphi(-1) \\ &=: \int_{\mathbb{R}} \left[\delta(x+1) - \delta(x-1)\right] \, \varphi(x) \, dx \\ &=: (\delta_{-1} - \delta_1, \varphi) \end{aligned}$$

6. **Fouriertransformation.**

   Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion r aus Aufgabe 5.

   Lösung.

   Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{r}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} r(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ik} \left(e^{-ik} - e^{ik} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{2ik} \left(e^{ik} - e^{-ik} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin k}{k} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}\end{aligned}$$

   Für $k = 0$ ist

$$\begin{aligned}\hat{r}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} r(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

   Wegen $\lim_{k \to 0} \frac{\sin k}{k} = 1$ kann man dann schreiben

$$\hat{r}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}$$

7. **Partielle Differentialgleichungen.**

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Lösen Sie die Differentialgleichung (nur partikuläre Lösung)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x_1} - 4u = f$$

indem Sie u durch (ein) Fourierintegral(e) ausdrücken und diskutieren Sie (dessen) deren Existenz.

Lösung. Ist u und seine Ableitungen bis einschließlich zweiter Ordnung integrierbar, dann können wir mit Hilfe der Algebraisierung der Ableitung die DGL zurückführen auf

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x_1} - 4u\right) &= (i^2k_1^2\widehat{u} + 2i^2k_2^2\widehat{u} + 3ik_1\widehat{u} - 4\widehat{u}) \\ &= (-k_1^2 - 2k_2^2 + i3k_1 - 4)\widehat{u} = \widehat{f}\end{aligned}$$

Das Polynom $P(k) := -k_1^2 - 2k_2^2 + i3k_1 - 4$ hat keine reellen Nullstellen. Somit ist $\frac{1}{P}$ auf der reellen Achse beschränkt und die Gleichung lässt sich nach $\widehat{u}$ umstellen und invers Fouriertransformieren.

$$u(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{f}}{P}\right)\right)(x)$$

Da nach Annahme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ist auch $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und damit insbesondere auch $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Somit ist auch $\frac{\hat{f}}{P} \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Denn

$$\left\|\frac{\widehat{f}}{P}\right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(k)|}{|P(k)|}\, dk \leq \sup_{k\in\mathbb{R}^2} |P(k)|^{-1} \, \|\widehat{f}\|_1 < \infty$$

8. **Operatoren auf Hilbert-Räumen.**

(a) Die Pauli-Matritzen sind definiert als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i. Es gilt
■ σ_2 ist spurfrei
■ σ_1 und σ_3 sind selbstadjungiert
☐ σ_1 ist orthogonaler Projektor
☐ σ_1,σ_2,σ_3 bilden eine Basis der 2×2-Matritzen

ii. Berechne den Kommutator $[\sigma_2, \sigma_3]$, also $\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2$!

$$\boxed{[\sigma_2,\, \sigma_3] = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Zeige: Wenn ein Operator gleichzeitig unitär und ein orthogonaler Projektor ist, dann ist er die Identität.

Lösung.

(a) i. tr $\sigma_2 = (\sigma_2)_{11} + (\sigma_2)_{22} = 0 + 0 = 0$
$\sigma_1^\dagger = \sigma_1$ und $\sigma_3^\dagger = \sigma_3$
$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \sigma_1$
Der Raum der 2×2 Matrizen ist 4-dimensional, also sind genau 4 linear unabhängige 2×2 Matrizen als Basis nötig.

ii.
$$[\sigma_2, \sigma_3] = \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Sei A ein unitärer, orthogonaler Projektor. Es gilt also:

- $A^\dagger = A^{-1}$ (unitär)
- $A^2 = A$, $A^\dagger = A$ (orthogonaler Projektor)

Somit:
$$A = A^2 = AA = A^\dagger A = A^{-1}A = 1$$