Probeklausur zum Ferienkurs Analysis 3 für Physiker
am 26.03.2010

---

1. **Fluss durch eine Oberfläche.**

   Zeigen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes

   $$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x - xy^2 - \tanh z \\ 4y + x^2 y \\ (5 - z)(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

   durch die Oberfläche S des Ellipsoids

   $$E := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x^2 + 6y^2 + 3z^2 \leq 2010\right\}$$

   gleich dem 7-fachen Volumen von E ist.

2. **Zirkulation entlang des Randes einer Fläche.**

   Gegeben sei die untere Hälfte einer Sphäre

   $$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \,\wedge\, z \leq 0\right\}$$

   Die Orientierung von S sei nach außen.

   Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes

   $$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cosh z - x^2 y \\ x(y^2 - z) + 1 \\ 5 - y^2 \end{pmatrix}$$

   entlang des positiv orientierten Randes ∂S von S.

3. **Holomorphe Funktionen.**

   Sei $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v(x, y) = 2xy - x^2 + y^2$.
   Geben Sie eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, sodass $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert.

4. **Residuenkalkül.**

   Gegeben sei das reelle Integral

   $$I = \int_0^\infty \frac{x}{1 + x^3} dx$$

   Außerdem sei γ die Kurve, die in der komplexen Ebene aus der Strecke $[0, R]$, dem Kreisbogen von R bis $Re^{i\frac{2}{3}\pi}$ und der Strecke $\left[Re^{i\frac{2}{3}\pi}, 0\right]$ besteht.

   (a) Skizzieren Sie den positiv orientierten Weg γ in der komplexen Ebene!

(b) Berechnen Sie das Integral I mithilfe γ! Dokumentieren Sie dabei ausführlich die Rechenschritte.

5. **Rechnen mit Distributionen.** Berechnen Sie die Ableitung von

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto r(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

im distributiven Sinne.

6. **Fouriertransformation.**

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion r aus Aufgabe 5.

7. **Partielle Differentialgleichungen.**

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Lösen Sie die Differentialgleichung (nur partikuläre Lösung)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x_1} - 4u = f$$

indem Sie u durch (ein) Fourierintegral(e) ausdrücken und diskutieren Sie (dessen) deren Existenz.

8. **Operatoren auf Hilbert-Räumen.**

(a) Die Pauli-Matritzen sind definiert als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i. Es gilt

☐ σ_2 ist spurfrei
☐ σ_1 und σ_3 sind selbstadjungiert
☐ σ_1 ist orthogonaler Projektor
☐ σ_1,σ_2,σ_3 bilden eine Basis der 2×2-Matritzen

ii. Berechnen Sie den Kommutator $[\sigma_2, \sigma_3]$, also $\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2$!

(b) Zeigen Sie: Wenn ein Operator gleichzeitig unitär und ein orthogonaler Projektor ist, dann ist er die Identität.