1 Hilbertraum und Skalarprodukt

1.1 Skalarprodukt?

1.
   - $F_1(\varphi,\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \|\varphi(x)\|\;dx \geqslant 0$
     Der zweite Teil der Bedingung ist ebenfalls erfüllt: Nur genau dann wenn $\varphi = 0$ wird das Integral 0.(Da nur der positive Betrag im Integral steht, wird das Integral positiv bei dem kleinsten Beitrag von $\varphi \neq 0$)
   - $F_1(\varphi,(\psi_1+\lambda\psi_2)) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\,(\psi_1(x)+\lambda\psi_2(x))\;dx = F_1(\varphi,\psi_1)+\lambda F_1(\varphi,\psi_2)$
   - $F_1(\varphi,\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\psi(x)\,dx = F_1(\varphi,\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)\overline{\overline{\psi(x)}}}\,dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx} =$
     $= \overline{F_1(\psi,\varphi)}$

2. $F2$ ist nicht hermitesch: $F_2(\varphi,\psi) := 2\varphi_1\psi_1 - \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2 \neq \overline{F_2(\psi,\varphi)}$

3. $$F_3(\varphi,\psi) := \varphi^\top \begin{pmatrix} 2 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \psi = 2\varphi_1\psi_1 - 0.5\varphi_1\psi_2 - 2\varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2$$
   - $F_3(\varphi,\varphi) = 2\varphi_1^2 - 0.5\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_1 + \varphi_2^2 = 2\varphi_1^2 + (1.25\varphi_1 - \varphi_2)^2 - 1.25^2\varphi_1^2 = \frac{7}{16}\varphi_1^2 + (1.25\varphi_1 - \varphi_2)^2 \geqslant 0$
     Ebenfalls =0 genau dann wenn $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$
   - $\langle\varphi,\psi\rangle \neq \langle\psi,\varphi\rangle$ => kein Skalarprodukt
   - $F_3(\varphi,\psi_1+\lambda\psi_2) := \varphi^\top \begin{pmatrix} 2 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} (\psi_1+\lambda\psi_2) = \varphi^\top \begin{pmatrix} 2 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \psi_1 +$
     $\lambda \cdot \varphi^\top \begin{pmatrix} 2 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \psi_2 = F_3(\varphi,\psi_1) + \lambda \cdot F_3(\varphi,\psi_2)$

4. F_4
   - $F_4(\varphi,\psi_1+\lambda\psi_2) := Tr(\overline{\varphi}^\top(\psi_1+\lambda\psi_2)) \underset{Spurlinear}{=} Tr(\overline{\varphi}^\top(\psi_1)) + \lambda Tr(\overline{\varphi}^\top(\psi_2)) =$
     $F_4(\varphi,\psi_1) + \lambda \cdot F_4(\varphi,\psi_2)$
   - $F_4(\varphi,\varphi) := Tr(\overline{\varphi}^\top\varphi) \underset{Diagonalisierung}{=} Tr(\overline{SDS^{-1}}^\top SDS^{-1}) = Tr(S\overline{D}S^{-1\top} SDS^{-1}) =$
     $Tr(S\overline{D}^\top DS^{-1}) \underset{Tr\varphi=TrD}{=} Tr(S\overline{D}^\top DS^{-1}) = Tr(\overline{D}^\top D = \sum |\lambda_i|^2 \geqslant 0$
     λ_i sind Eigenwerte von φ. Da nur die Nullmatrix ausschließlich 0en als Eigenwerte hat, ist damit auch der zweite Teil der Behauptung gegeben.
   - $\overline{F_4(\varphi,\psi)} := \overline{Tr(\overline{\varphi}^\top\psi)} = Tr(\overline{\overline{\varphi}^\top\psi}) = Tr(\varphi^\top\overline{\psi}) \underset{(A\cdot B)^\top = B^\top\cdot A^\top}{=} Tr((\overline{\psi}^\top \varphi^{\top\top})^\top) =$
     $Tr((\overline{\psi}^\top\varphi)^\top) = Tr(\overline{\psi}^\top\varphi) = F_4(\psi,\varphi)$

2 Orthonormalbasen

2.1 Eigenschaften von ONB

1. *Zu zeigen:*
$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle = \sum_{j\in J}\langle\psi_1,\varphi_j\rangle\langle\varphi_j,\psi_2\rangle$$
Es gilt für $\psi_1,\psi_2 \in \mathscr{H}$, $(\varphi_j)_{j\in J}$ ONB von $\mathscr{H}$:
$$\psi_1 = \sum_{j\in J}\langle\varphi_j,\psi_1\rangle\,\varphi_j \qquad \psi_2 = \sum_{k\in J}\langle\varphi_k,\psi_2\rangle\,\varphi_k \qquad \langle\varphi_j,\varphi_k\rangle = \delta_{j,k}$$
$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle = \left\langle \sum_{j\in J}\langle\varphi_j,\psi_1\rangle\,\varphi_j, \sum_{k\in J}\langle\varphi_k,\psi_2\rangle\,\varphi_k \right\rangle =$$
$$= \sum_{j\in J}\sum_{k\in J}\overline{\langle\varphi_j,\psi_1\rangle}\,\langle\varphi_k,\psi_2\rangle\,\underbrace{\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle}_{=\delta_{j,k}} = \sum_{k\in J}\langle\psi_1,\varphi_j\rangle\langle\varphi_j,\psi_2\rangle \qquad \square$$

2. Wir geben uns ein beliebiges $\psi \in \mathscr{H}$ vor. $(\varphi_j)_{j\in J}$ sei ONB von $\mathscr{H}$
$\forall j \in \mathbb{N}$ gelte:
$$\langle\varphi_j,\psi\rangle = 0$$
Wir betrachten die Besselsche Gleichung für ψ:
$$\|\psi\|^2 := \sum_{j\in J}|\underbrace{\langle\varphi_j,\psi\rangle}_{=0}|^2 = 0 \qquad \Rightarrow \psi = 0 \qquad \square$$

2.2 Orthonormalbasis auf dem Einheitskreis

1. $|Z| = 1$
Parametrisierung: $z = e^{i\varphi} \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$

2. Alle Funktionen müssen 2π-periodisch sein!(Sie sind Funktionen von $e^{i\varphi}$, das selbst 2π periodisch ist)

3. $0 = \langle X_n, F\rangle = \int\limits_0^{2\pi}\overline{X_n}Fd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\overline{\frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}}Fd\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}e^{-in\varphi}Fd\varphi$

   Aus Vergleich mit dem Fourierkoeffizienten $c_n = \frac{1}{T}\int_c^{c+T}f(t)c^{-in\omega t}dt$ sieht man: φ erfüllt die Rolle von t, $\omega = 1, T = 2\pi$ und vor allem: $0 = \langle X_n, F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot c_n$

   Die Funktion ist durch die Fourierreihe von $F(\varphi)$ gegeben: $F(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty}0\cdot e^{in\varphi} = 0 \qquad \square$

3 Operatoren

3.1 Rechnen mit Operatoren

3.1.1 Unitäre Operatoren

$U, V : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ unitär $\Leftrightarrow U^{-1} = U^\dagger$, $V^{-1} = V^\dagger$

1.
$$(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$$

2. φ, $\psi \in \mathscr{H}$.
$$\langle U\varphi, U\psi\rangle = \left\langle U^\dagger U\varphi, \psi\right\rangle = \left\langle U^{-1}U\varphi, \psi\right\rangle = \langle \varphi, \psi\rangle$$

3. $\forall \varphi \in \mathscr{H}$:
$$\|U\varphi\|^2 = \langle U\varphi, U\varphi\rangle \overset{2.}{=} \langle \varphi, \varphi\rangle = \|\varphi\|^2$$

4.
$$\|U\| \overset{def}{=} \sup_{\psi \in \mathscr{H}\setminus\{0\}} \left\| U \frac{\psi}{\|\psi\|}\right\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|U\psi\| \overset{3.}{=} \sup_{\|\psi\|=1} \|\psi\| = 1$$

3.1.2 Kommutator

$[x,p]\psi = (xp - px)\psi = (-xi\frac{d}{dx} + i\frac{d}{dx}x)\psi = -xi\frac{d}{dx}\psi + i\frac{d}{dx}(x\psi) \underset{Produktregel}{=} -xi\frac{d\psi}{dx} + i\psi + ix\frac{d\psi}{dx} = i\psi$
$\Rightarrow \quad [x,p] = i$

3.1.3 Die Eins

Sei A ein unitärer, orthogonaler Projektor. Es gilt also:

- $A^\dagger = A_{-1}$ (unitär)
- $A^2 = A$, $A^\dagger = A$ (orthogonaler Projektor)

Somit:

$$A = A^2 = AA = A^\dagger A = A^{-1}A = 1$$

3.2 Translationsoperator

Der Translationsoperator ist wie folgt definiert:
$T_a : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \quad (T_a\psi)(x) := \psi(x-a))$.
Hier sei $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. $T_a^{-1} = T_{-a}$
   Beweis:
   $$(T_{-a}T_a\psi)(x) = (T_a\psi)(x-(-a)) = \psi(x+a-a) = \psi(x)$$
   und
   $$(T_aT_{-a}\psi)(x) = (T_{-a}\psi)(x-a)) = \psi(x-a-(-a)) = \psi(x)$$
2. $T_a^\dagger = T_{-a}$
   Beweis:
   $$\langle\varphi, T_a\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\,(T_a\psi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\psi(x-a)dx =$$
   $$= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y+a)}\psi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{(T_{-a}\varphi)(y)}\psi(y)dy = \langle T_{-a}\varphi, \psi\rangle$$
3. T_a ist ☐ orthogonaler Projektor ■ unitär ☐ selbstadjungiert
   Beweis: aus $T_a^{-1} = T_{-a}$ und $T_a^\dagger = T_{-a}$ folgt $T_a^{-1} = T_a^\dagger$. Das ist die Definition eines unitären Operators.

3.3 Reell?

Zu zeigen:
$$A = A^\dagger \quad \Rightarrow \quad \forall\psi \in \mathscr{H} : \langle\psi, A\psi\rangle \in \mathbb{R}$$

Beweis:

$\psi \in \mathscr{H}$:
$$\langle\psi, A\psi\rangle = \overline{\langle A\psi, \psi\rangle} \overset{A=A^\dagger}{=} \overline{\langle A^\dagger\psi, \psi\rangle} \overset{def A^\dagger}{=} \overline{\langle\psi, A\psi\rangle}$$

$$\langle\psi, A\psi\rangle = \overline{\langle\psi, A\psi\rangle} \qquad \Rightarrow \langle\psi, A\psi\rangle \in \mathbb{R}$$