1 Aufgabe

Berechnen Sie die Fouriertransfomierte von

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

(Ergebnis: $\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$)

Lösung: Lösung über den Residuensatz $\to f$ aufgefasst also komplexe Funktion:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikz} \frac{1}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{-R} e^{-ikz} \frac{1}{(z-i)(z+i)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \frac{e^{-ikRe^{it}}}{R^2 e^{i2t}+1} iRe^{-it}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} \widehat{f}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{e^{-ikRe^{it}}}{R^2e^{i2t}+1} iRe^{-it} \;\; dt &= \int_a^b \frac{e^{-ikR(\cos t + i \sin t)}}{R^2 e^{i2t}+1} iRe^{-it} \;\; dt \\ &= \int_a^b \frac{e^{-ikR\cos t}\, e^{kR\sin t}}{R^2e^{i2t}+1} iRe^{-it}\, dt \\ |\cdot| \le |a-b| &\int_a^b \frac{Re^{kR\sin t}}{R^2 e^{i2t}+1}\, dt\end{aligned}$$

Damit das Integral verschwindet, muss man den Weg für

- $k < 0$ oben schließen, da $\sin t \geq 0, t \in [a = 0, b = \pi]$)

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_i \widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-ikz}}{\frac{d}{dz}(z^2+1)}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-i^2k}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^k}{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^k$$

- $k \geq 0$ oben schließen, da $\sin t \leq 0, t \in [a = 0, b = -\pi]$) Vorsicht! Orientierung der Kurve im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) $\Rightarrow$ Residuum negativ zu werten.

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_{-i} \widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-ikz}}{\frac{d}{dz}(z^2+1)}\bigg|_{z=-i} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} - 2\pi i \frac{e^{i^2k}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-k}}{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k}$$

Insgesamt also:

$$\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \quad \square$$

2 Aufgabe

Zeigen Sie für $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{\varphi}(x)\, dx$$

Hinweis: Skalarprodukt $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx$ und Plancherel-Identität.

Vergleich mit Fouriertransformation im distributiven Sinne.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, \varphi(x)\, dx &= \langle \overline{\mathcal{F} f}, \varphi \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}^{-1} \overline{f}, \varphi \rangle \\
\text{(Plancherel)} &= \langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \overline{f}, \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \langle \overline{f}, \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{\varphi}(x)\, dx \quad \square
\end{aligned}$$

Denn

$$\overline{\mathcal{F} f} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}\, f(x)\, dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{-ikx}}\, \overline{f(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\, \overline{f(x)}\, dx = \mathcal{F}^{-1} \overline{f}$$

3 Aufgabe

Zeigen Sie für die *Heavy-Side*-Funktion und eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d\Theta}{dx}, \varphi \right) = (\delta, \varphi)$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d\Theta}{dx},\varphi\right) &:= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d\Theta}{dx}(x)\right)\,\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\,\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx \\
&= -\left[\varphi(x)\right]_0^\infty \overset{\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \varphi(0) \\
&:= \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&:= (\delta(x),\varphi) \quad \square
\end{aligned}
$$

Also $\frac{d\Theta}{dx} = \delta(x)$ im distributiven Sinne.

4 Aufgabe

1. Zeigen Sie, dass für die δ-Distribution für eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\mathcal{F}\delta,\varphi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n},\varphi\right)$$

$$\text{Also}\quad \mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}$$

Lösung:

$$(\mathcal{F}\delta,\varphi) := (\delta,\mathcal{F}\varphi) \overset{\text{Def.}\delta}{=} \mathcal{F}\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i0\cdot x}\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\,\varphi(x)\,dx := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n},\varphi\right) \quad \square$$

2. Zeigen Sie, dass für die konstante 1-Funktion aufgefasst als Distribution für eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\mathcal{F}1,\varphi) = \left((2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta,\varphi\right)$$

$$\text{Also}\quad \mathcal{F}1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta$$

Hinweis: Für die δ-Distribution gilt $\left(\mathcal{F}^2\delta,\varphi\right) = (\delta,\varphi)$

Lösung:

$$(\mathcal{F}1,\varphi) \overset{(1.)}{=} \left(\mathcal{F}\sqrt{2\pi}^n\mathcal{F}\delta,\varphi\right) = \left(\sqrt{2\pi}^n\mathcal{F}^2\delta,\varphi\right) = \left(\sqrt{2\pi}^n\delta,\varphi\right) \quad \square$$

3. Im klassischen Sinne existiert die Fouriertransformierte von $\cos(x), x \in \mathbb{R}$ nicht, da dass Integral nicht konvergiert. Fasst man den Kosinus als Distribution auf, lässt sich ihm auf diese Weise eine Fouriertransfomierte zuordnen. Nehmen Sie dafür an, dass gilt:

$$(\psi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, \varphi(x)\; dx$$

Rufen Sie sich jedoch hierbei in Erinnerung, dass es sich hierbei um eine symbolische Schreibweise handelt, die hier zum Erfolg führt!

Berechnen Sie

$$(\mathcal{F}\cos)(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(k-1)) + \delta(k+1))$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\cos)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\; dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, e^{ix}\; dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, e^{-ix}\; dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(k-1)} \cdot 1\; dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(k+1)} \cdot 1\; dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\widehat{1}(k-1) + \widehat{1}(k+1)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\delta(k-1) + \delta(k+1)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k-1) + \delta(k+1)\right) \quad \square
\end{aligned}$$

5 Aufgabe

Benutzen Sie die Algebraisierung der Ableitung der Fouriertransformation und die Ergebnisse aus Aufgabe 4 um folgende inharmonische DGL zu lösen mit $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = \cos t$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\ddot{x}-\dot{x}\right)(k) &= \mathcal{F}\ddot{x}(k)-\mathcal{F}\dot{x}(k)=\left(\mathcal{F}\cos\right)(k)\\
i^2k^2\widehat{x}(k)-ik\widehat{x}(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k-1)+\delta(k+1)\right)\\
\widehat{x}(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k-1)+\delta(k+1)}{-k^2-ik}\\
x_s(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itk}\,\frac{\delta(k-1)+\delta(k+1)}{-k^2-ik}\,dk\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itk}\,\frac{\delta(k-1)}{-k^2-ik}\,dk+\int_{\mathbb{R}} e^{itk}\,\frac{\delta(k+1)}{-k^2-ik}\,dk\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}}{-1-i}+\frac{e^{-it}}{-1+i}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{it}(i-1)-e^{-it}(i+1)}{(-1)^2-i^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{i(e^{it}-e^{-it})}{2}-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\\
&= \frac{-1}{2}(\sin t+\cos t)
\end{aligned}$$

6 Aufgabe

1. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}^n \quad \text{mit} \quad x^2=\langle x,x\rangle = x_1^2+\cdots+x_n^2$$

Hinweis: Lösen sie zunächst $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2}\,dx_j\right)^2$ in Polarkoordinaten.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2}\,dx_j\right)^2 &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2}\,e^{-y_j^2}\,dx_j\,dy_j\\
&\overset{\text{Trafo}}{=} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2\overbrace{(cos^2\varphi+sin^2\varphi)}^{=1}}\,r\,dr\,d\varphi\\
&= 2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}\\
&= \pi\\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2}\,dx_j &= \sqrt{\pi} \quad \square
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2}\ dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2}\ dx_j = \sqrt{\pi}^n$$

2. Zeigen Sie, dass für die Fouriertransfomierte der n-dimensionalen Gauß-Funktion mit $x, k \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ gilt

$$g(x) := \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(k) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}k^2}$$

Hinweis: Nutzen Sie eine quadratische Ergänzung für das Fourierintegral.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x}\ \frac{1}{\sigma^n}\ e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\ \sigma^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\frac{x^2}{2\sigma^2}+ik\cdot x+\frac{-\sigma^2}{2}k^2)}\ e^{\frac{-\sigma^2}{2}k^2}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\ \sigma^n} e^{\frac{-\sigma^2}{2}k^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{i\sigma}{\sqrt{2}}k)^2}\ dx \\
\psi(x) := \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{i\sigma}{\sqrt{2}}k \ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sigma^n} e^{\frac{-\sigma^2}{2}k^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\psi^2}\ \underbrace{\frac{1}{|\det D\psi|}}_{=\sqrt{2}^n\sigma^n}\ d\psi \\
&= \frac{\sqrt{2}^n\sigma^n}{\sqrt{2\pi}^n\sigma^n} e^{\frac{-\sigma^2}{2}k^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\psi^2}\ d\psi}_{=\sqrt{\pi}^n} \\
&= e^{\frac{-\sigma^2}{2}k^2} \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- $(a+b)^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a,a\rangle + 2\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle = a^2 + 2\ a\cdot b + b^2$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$
- $\psi(x) = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{i\sigma}{\sqrt{2}}k$

$$D\psi = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\psi_1 & \cdots & \partial_{x_n}\psi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}\psi_n & \cdots & \partial_{x_n}\psi_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}, ..., \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$\det D\psi = \det\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}, ..., \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}^n\sigma^n}$$

7 Aufgabe

Lösen Sie die freie Schrödingergleichung über die Fouriertransformation

$$i\partial_t\psi(x,t) = -\frac{1}{2}\Delta\psi(x,t) \quad \text{mit } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \psi, \widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Und

$$\psi_0(x) = \psi(x,0)$$

$\left(\text{Ergebnis: } \psi(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\frac{k^2}{2}t} \cdot \mathcal{F}\psi_0(k)\right)\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{F}_x i\partial_t\psi(x,t) &= \mathcal{F}_x\left(-\frac{1}{2}\Delta\psi(x,t)\right) \\
\Leftrightarrow i\partial_t\widehat{\psi}(k,t) &= -\frac{1}{2}\mathcal{F}_x\left(\partial^2_{x_1}\psi(x,t) + \cdots + \partial^2_{x_n}\psi(x,t)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\mathcal{F}_x\partial^2_{x_1}\psi(x,t) + \cdots \mathcal{F}_x\partial^2_{x_n}\psi(x,t)\right) \\
&= -\frac{1}{2}i^2(k_1^2 + \cdots + k_n^2)\widehat{\psi}(k,t) \\
&= \frac{1}{2}\, k^2\, \widehat{\psi}(k,t)
\end{aligned}$$

Man erählt eine separierbare DGL nach t, die sich mit folgender Merkregel lösen lässt

$$i\frac{d\widehat{\psi}}{dt} = \frac{k^2}{2}\,\widehat{\psi} \quad \overset{dt/\hat{\psi}}{\Rightarrow} \quad \frac{d\widehat{\psi}}{\widehat{\psi}} = -i\frac{k^2}{2}\,dt \Rightarrow \int\frac{d\widehat{\psi}}{\widehat{\psi}} = -i\frac{k^2}{2}\int dt \Rightarrow \ln\widehat{\psi} = -i\frac{k^2}{2}t$$

bigg Mit der Anfangsbedingung $\psi(x,0) = \psi_0(x) \Leftrightarrow \widehat{\psi}(k,0) = \widehat{\psi}_0(k)$ ergibt sich

$$\widehat{\psi}(k,t) = \widehat{\psi}_0(k) \cdot e^{-i\frac{k^2}{2}t}$$

Durch Rücktransformation erhält man nun

$$\psi(x,t) = \mathcal{F}^{-1}e^{-i\frac{k^2}{2}t} \cdot \mathcal{F}\psi_0(k) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\frac{k^2}{2}t} \cdot \mathcal{F}\psi_0(k)\right)$$