# 1 Aufgabe

Berechnen Sie die Fouriertransfomierte von

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

(Ergebnis: $\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$)

# 2 Aufgabe

Zeigen Sie für $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, \varphi(x)\; dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{\varphi}(x)\; dx$$

*Hinweis:* Skalarprodukt $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, \varphi(x)\; dx$ und Plancherel-Identität.

*Vergleich mit Fouriertransformation im distributiven Sinne.*

# 3 Aufgabe

Zeigen Sie für die *Heavy-Side*-Funktion und eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left( \frac{d\Theta}{dx}, \varphi \right) = (\delta, \varphi)$$

# 4 Aufgabe

1. Zeigen Sie, dass für die $\delta$-Distribution für eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\mathcal{F}\delta, \varphi) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}, \varphi \right)$$

$$\text{Also} \quad \mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}$$

2. Zeigen Sie, dass für die konstante 1-Funktion aufgefasst als Distribution für eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt
$$(\mathcal{F}1, \varphi) = \left((2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta, \varphi\right)$$
$$\text{Also} \quad \mathcal{F}1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta$$
*Hinweis:* Für die $\delta$-Distribution gilt $\left(\mathcal{F}^2\delta, \varphi\right) = (\delta, \varphi)$

3. Im klassischen Sinne existiert die Fouriertransformierte von $\cos(x), x \in \mathbb{R}$ nicht, da dass Integral nicht konvergiert. Fasst man den Kosinus als Distribution auf, lässt sich ihm auf diese Weise eine Fouriertransfomierte zuordnen. Nehmen Sie dafür an, dass gilt:
$$(\psi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx$$
Rufen Sie sich jedoch hierbei in Erinnerung, dass es sich hierbei um eine symbolische Schreibweise handelt, die hier zum Erfolg führt!

   Zeigen Sie
$$(\mathcal{F}\cos)(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(k-1)) + \delta(k+1))$$

# 5 Aufgabe

Benutzen Sie die Algebraisierung der Ableitung der Fouriertransformation und die Ergebnisse aus Aufgabe 4 um folgende inharmonische DGL zu lösen mit $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$
$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = \cos t$$

# 6 Aufgabe

1. Zeigen Sie
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}^n \quad \text{mit} \quad x^2 = \langle x, x\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$
*Hinweis:* Lösen sie zunächst $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2}\,dx_j\right)^2$ in Polarkoordinaten.

2. Zeigen Sie, dass für die Fouriertransfomierte der n-dimensionalen Gauß-Funktion mit $x, k \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ gilt
$$g(x) := \frac{1}{\sigma^n}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(k) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}k^2}$$
*Hinweis:* Nutzen Sie eine quadratische Ergänzung für das Fourierintegral.

# 7 Aufgabe

Lösen Sie die freie Schrödingergleichung über die Fouriertransformation

$$i\partial_t \psi(x,t) = -\frac{1}{2}\Delta\psi(x,t) \quad \text{mit } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \psi, \widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Und

$$\psi_0(x) = \psi(x,0)$$

$\left(\text{Ergebnis: } \psi(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\frac{k^2}{2}t} \cdot \mathcal{F}\psi_0(k)\right)\right)$