I. Lösungen zur komplexen Differenzierbarkeit

1. $z = x + iy$, $w = u + iv$. Gesucht sind $Re\, w = u$ und $Im\, w = v$.

   (a) $w = \frac{1}{x+1+i(y-1)} = \frac{x+1}{(x+1)^2+(y-1)^2} - i\frac{y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$

   (b) $w = \sqrt{z} \Rightarrow z = w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = x + iy$
   $x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv \qquad \Rightarrow u^2 - \frac{y^2}{4u^2} = x \qquad \Rightarrow u^4 - u^2x - \frac{y^2}{4} = 0$
   $u^2 = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{x^2+y^2}\right) > 0$ Lösung mit Minus scheidet aus.

   $$u(x,y) = \pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \qquad v(x,y) = \frac{y}{2u} = \pm\frac{y}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}$$

   (c) $w = z^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$

2. (a) $f(z) = e^{-z^2} = e^{-(x^2-y^2)} \cdot e^{-i2xy} = e^{y^2-x^2} \cdot \cos 2xy - ie^{y^2-x^2} \cdot \sin 2xy =: u + iv$

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{y^2-x^2}\left[x\cos 2xy + y\sin 2xy\right] = \frac{\partial v}{\partial y}$$
   $$\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{y^2-x^2}\left[y\cos 2xy - x\sin 2xy\right] = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   $\Rightarrow$ holomorph auf $\mathbb{C}$.

   (b) $g(z) = z + z^3 = x + x^3 - 3xy^2 + i(y + 3x^2y - y^3) =: u + iv$

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   holomorph auf $\mathbb{C}$

II. Aufgaben zu Laurent- und Potenzenreihen

1. (a) Es handelt sich um einen Pol 5. Ordnung bei $z = -3$. Nicht hebbar, da Residuum ungleich Null und keine Residuenbildung möglich bei wesentlichen Singularitäten.

   (b) $L(z) = \sum_{n=-5}^{\infty} a_n(z+3)^n$

   (c) Das Residuum ist der Koeffizient, der zum Exponenten -1 gehört.

2. Partialbruchzerlegung:
   $\frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} = \frac{z(A+B)+A-B}{(z-1)(z+1)}b \Rightarrow A = \frac{1}{2} = -B$

Mithilfe der geometrischen Reihe können die Summanden entwickelt werden.

$$f(z) = \frac{i}{(z-1)\cdot(z+1)} = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right] = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{1+(z-2)} - \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}(z-2)}\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n - \frac{i}{2}\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n}(z-2)^n = \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-3^{-(n+1)}\right](z-2)^n$$

3. (a) Verwende die Reihenentwicklung des Cosinus!

$$f(z) = \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \frac{-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{z^2} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Der Konvergenzradius ist ∞, genau wie der des Cosinus.

(b) Entwicklung um $z_1 = -1$, Reihenentwicklung des Sinus.

$$g(z) = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^{-4n-2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+1)^{4n+1}(2n+1)!}$$

4. Betrachte das nichtkonstante Polynom $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ mit $a_j \in \mathbb{C}$.
Angenommen $P(z)$ hätte keine Nullstelle. Dann wäre $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ beschränkt mit $lim_{|z|\to\infty}f(z) = 0$ und folglich holomorph.
Nach dem Satz von Liouville wäre dann $f(z)$ konstant und somit wäre auch P konstant.
Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung (nichtkonstantes Polynom).
Also hat das Polynom mindestens eine Nullstelle!

III. Lösungen zum Cauchyschen Integralsatz

1. Parametrisierung der Einheitskreislinie: $z(\phi) = e^{i\phi}$
$\phi \in [0, 2\pi) \qquad \Rightarrow dz = ie^{i\phi}d\phi$

$$I = \int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{in\phi} ie^{i\phi} d\phi$$

Für $n \neq -1$: $I = 0$
Für $n = -1$: $I = i\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi i$

2. Polstellen: $z^2 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm i$
Nur z=i liegt innerhalb der Kreislinie.

$$\int_{\partial C}\frac{e^z dz}{z^2+1} = \int_{\partial C}\frac{f(z)dz}{z-i} = 2\pi i\cdot f(i) = \pi e^i$$

IV. Aufgaben zum Residuenkalkül

1. (a) $h(z)$ hat bei $z = z_0$ eine Nullstelle erster Ordnung, also $h(z_0) = 0$.

$$Res_{z_0}\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{dz^0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}\Big|_{z=z_0} = lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

(b)
- $Res_{-1}f(z) = \frac{iz(z-2)}{(z^2+4)+2z(z+1)}\Big|_{z=-1} = \frac{3}{5}i$
- $Res_{2i}f(z) = \frac{iz(z-2)}{(z^2+4)+2z(z+1)}\Big|_{z=2i} = \frac{1-i}{i-2} = \frac{i-3}{5}$
- $Res_{-2i}f(z) = \frac{iz(z-2)}{(z^2+4)+2z(z+1)}\Big|_{z=-2i} = \frac{i+1}{i+2} = \frac{i+3}{5}$

2. (a) o.B.d.A. sei $a > 0$
.

$$\int_0^\infty \frac{2ax^2}{(x^2+a^2)^3}dx \longrightarrow 2\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{2az^2}{(z^2+a^2)^4}dz$$

Der Integrand, als komplexe Funktion f(z) interpretiert, hat Polstellen vierter Ordnung bei $z = \pm ia$.
Um den Residuensatz zu verwenden, muss der Weg zu einem geschlossenen Weg in der komplexen Ebene ergänzt werden. Wir wählen den Halbkreisbogen für $\phi \in [0, \pi)$. Nur das Residuum bei z=ia ist relevant.

$$Res_{ia}f(z) = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(z-ia)^4\frac{2az^2}{(z-ia)^4(z+ia)^4}\Big|_{z=ia} = -\frac{i}{16a^4}$$

Nun gilt mit $z = re^{i\phi}$:

$$2\pi i\cdot Res_{ia}f(z) = \frac{\pi}{8a^4} = 2\lim_{r\to\infty}\left[\int_{-r}^{r}\frac{2az^2}{(z^2+a^2)^4}dz + \int_{\gamma_r}\frac{2ar^2e^{2i\phi}}{(r^2e^{2i\phi}+a^2)^4}ie^{i\phi}d\phi\right]$$

Im Limes geht der letzte Summand gegen Null, die Abschätzung läuft wie üblich! Also:

$$\int_0^\infty \frac{2ax^2}{(x^2+a^2)^4}dx = \frac{\pi}{8a^4}$$

(b)

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \longrightarrow \lim_{0\to\infty}\int_0^r \frac{dz}{1+z^4}$$

Der Integrand besitzt 4 Polstellen 1. Ordnung bei $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $z_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$, $z_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}}$. Nur z_1 liegt innerhalb des Integrationswegs, also innerhalb des 1. Quadranten. Residuum:

$$Res_{e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4z^3}\Bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{\frac{-3i\pi}{4}}$$

Der Integrationsweg besteht aus der Strecke $[0, r]$ (z=x), dem Kreisbogen γ_r ($z = re^{i\phi}$) und der Strecke $[ir, 0]$ ($z = -ix$). Mit dem Residuensatz folgt:

$$2\pi i \cdot \frac{1}{4}e^{\frac{-3i\pi}{4}} = \int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} = I + 0 - i \cdot I = (1-i)I$$

Da das Integral ber den Kreisbogen im Limes wieder verschwindet. Insgesamt:

$$I = \frac{1}{1-i}\frac{\pi i}{2e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{(1+k^2)^2}dk = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r}\frac{e^{-ikx}}{(1+k^2)^2}dk$$

Auch dieses Integral läuft auf den Residuensatz hinaus.
<u>Polstellen:</u> $k_{1,2} = \pm i$ (doppelt)
<u>Residuen:</u>

$$Res_i \frac{e^{-ikx}}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{1!}\frac{d}{dk}(k-i)^2\frac{e^{-ikx}}{(k-i)^2(k+i)^2}\Bigg|_{k=i} = \frac{1}{4}ie^x(x-1)$$

$$Res_{-i} \frac{e^{-ikx}}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{1!}\frac{d}{dk}(k+i)^2\frac{e^{-ikx}}{(k-i)^2(k+i)^2}\Bigg|_{k=-i} = \frac{1}{4}ie^{-x}(1+x)$$

Wie immer muss der Integrationsweg geschlossen werden. Wegen

$$\left|e^{-ikx}\right| \overset{k=re^{i\phi}}{=} \left|e^{-ire^{i\phi}}\right| = \left|e^{-irx\cos\phi}e^{rx\sin\phi}\right| = \left|e^{rx\sin\phi}\right| \overset{r\to\infty}{\to} 0$$

muss der Halbkreis durch die negative komplexe Halbebene verlaufen, weil nur dort $\sin\phi$ negativ ist. Mit dem Residuensatz gilt dann (nur das Residuum bei $z = -i$ ist relevant):

$$-\frac{\pi(1+x)}{2}e^{-x} = 2\pi i \cdot Res_{-i}\frac{e^{-ikx}}{(1+k^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\gamma \widehat{f(k)}dk = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r}\frac{e^{-ikx}}{(1+k^2)^2}dk + \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{0}\frac{ire^{i\phi}e^{-ire^{i\phi}x}}{(1+r^2e^{2i\phi})^2}d\phi$$

Wir schätzen den letzten Term ab:

$$\left| \int_{\pi}^{0} \frac{ire^{i\phi}e^{-ire^{i\phi}x}}{(1+r^2e^{2i\phi})^2} d\phi \right| \leq \int_{-\pi}^{0} \left| \frac{re^{rx\sin\phi}}{(1+r^2e^{2i\phi})^2} \right| d\phi \overset{r\to\infty}{\to} 0$$

Somit ergibt sich:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{(1+k^2)^2} dk = -\frac{\pi(1+x)}{2} e^{-x}$$

(d) Integrationsweg entlang des **Tortenstücks** mit

- Strecke $[0, r]$ $(z = x,\ x \in [0, r])$
- Kreisbogen von r bis $re^{\frac{2\pi i}{n}}$ $(z = re^{i\phi},\ \phi \in \left[0, e^{\frac{2\pi i}{n}}\right])$
- Strecke $\left[e^{\frac{2\pi i}{n}}, 0\right]$ $(z = re^{\frac{2\pi i}{n}},\ r \in [r, 0])$

Der Integrationsweg eignet sich besonders, da auf diese Weise immer nur ein einziges Residuum eingeschlossen wird, was Rechenarbeit spart. Außerdem verschwindet das Integral entlang des Kreisbogens im Limes und in der dritten Strecke taucht das gesuchte Integral nochmal auf.

3. (a) Integral und Hauptwertintegral stimmen genau dann überein, wenn das Integral in jedem Punkt auf dem Integrationsbereich existiert. Hier liegt eine Singularität bei 0 vor. Allerdings ist diese hebbar, weshalb der Integrand stetig fortgesetzt werden kann.

(b)

$$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = \frac{1-\cos^2 z}{z^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2}{z^2} = \frac{1-\frac{1}{2}\left(1+2\cos 2z\right)}{z^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \cos 2z}{z^2} = \frac{1-2\cos 2z}{2z^2} = Re \frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}$$

(c) Der Integrand $f(z) = Re\,\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}$ besitzt eine doppelte hebbare Singularität bei $z = 0$. Das zugehörige Residuum ist:

$$Res_0 f(z) = Re \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} z^2 \frac{1-e^{2iz}}{2z^2} \Big|_{z=0} = -i$$

Interpretiert man das Integral als komplexes Wegintegral (siehe Angabe), so kann man das Hauptwertintegral ausrechnen. In diesem Fall stimmen der Wert von Hauptwertintegral und Integral überein.
Der Integrationsweg muss geschlossen werden, also ergänzt man den Halbkreisbogen in der positiven komplexen Halbebene (γ_r), wobei die

Polstelle einmal obenrum (γ_1) und einmal untenrum umgangen wird (γ_2) (siehe Skizze).
Der Residuensatz kann angewendet werden und das Integral lautet nun folgendermaßen:

$$\mathscr{P}\int_\gamma \frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz = \lim_{r\to\infty}\mathscr{P}\int_{-r}^{r}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz + \lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz =$$

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_{\gamma 1}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz + \int_{\gamma_r}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz}_{=2\pi i\sum Res=0} + \underbrace{\int_{\gamma 2}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz + \int_{\gamma_r}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz}_{=2\pi i\sum Res=2\pi i\cdot(-i)}\right] = \pi$$

Wir betrachten nun die folgende Abschätzung mit $z = re^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi$:

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{\gamma_r}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz\right| \le \lim_{r\to\infty}\int_0^\pi \left|\frac{1-2e^{2ire^{i\phi}}}{2re^{i\phi}}\right| d\phi \le$$

$$\le \lim_{r\to\infty}\left[\int_0^\pi \underbrace{\left|\frac{1}{2r}\right|}_{\to 0} d\phi + \int_0^\pi \underbrace{\left|\frac{e^{-2r\sin\phi}}{r}\right|}_{\to 0} d\phi\right] = 0$$

Da der Sinus in $[0,\pi]$ beschränkt und größer Null ist. Für das gesuchte Integral folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = Re\,\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-2e^{2iz}}{2z^2}dz = \pi$$