I. Aufgaben zur komplexen Differenzierbarkeit

1. Zerlege in Real- und Imaginärteil! $z,w \in \mathbb{C}$

   (a) $w = \frac{1}{z+1-i}$
   (b) $w = \sqrt{z}$
   (c) $w = z^3$

2. Sind folgende Funktionen holomorph in ganz $\mathbb{C}$?
   Nachweis mit Cauchy-Riemann-Gleichungen!

   (a) $f(z) = e^{-z^2}$
   (b) $g(z) = z + z^3$

II. Aufgaben zu Laurent- und Potenzenreihen

1. Das Residuum einer unbekannten, auf $\mathbb{C}\setminus\{-3\}$ holomorphen Funktion lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$a_{-1} := Res_{-3} f(z) = \frac{1}{6 \cdot 4} \frac{d^4}{dz^4} (z+3)^5 \cdot f(z)\Big|_{z=-3} \neq 0$$

   Gib an:

   (a) Die Art der Singularität (warum kann man die anderen ausschließen?), ggf. die Ordnung
   (b) Die Struktur der zugehörigen Laurentreihe bei Entwicklung um $z = -3$
   Hinweis: Man muss sich hierbei natürlich einige Konstanten definieren! Was ist mit Hauptteil und Nebenteil?
   (c) Den Zusammenhang von Residuum und Laurentreihe.

2. Entwickle $f(z) = \frac{i}{(z-1)\cdot(z+1)}$ um $z_0 = 2$.
   Hinweis: Partialbruchzerlegung, Geometrische Reihe

3. Bestimme die Laurent-Reihen-Entwicklung und den Konvergenzradius!

   (a) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ um $z_0 = 0$
   (b) $g(z) = (z+1)\sin\frac{1}{(z+1)^2}$ um $z_1 = -1$

4. **Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra**
   Beweise: Jedes Polynom vom Grade $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

   Hinweis: Betrachte eine nichtkonstantes Polynom P, außerdem seinen Kehrwert $\frac{1}{P}$. Verwende den Satz von Liouville in einem Widerspruchsbeweis!

III. Aufgaben zum Cauchyschen Integralsatz

1. **Komplexes Wegintegral** Berechne für $n \in \mathbb{Z}$ das Kontourintegral
$$\int_\gamma z^n dz$$
wobei γ die pos. orient. Einheitskreislinie ist! *(Fallunterscheidung von n!)*

2. **Berechnung eines Integrals** Berechne das Integral, wobei C die Kreisscheibe mit $z = 1 + i$ als Zentrum und dem Radius $r = 2$ ist. Skizze!
$$\int_{\partial C} \frac{e^z dz}{z^2 + 1}$$

IV. Aufgaben zum Residuenkalkül

1. **Residuen berechnen**

   (a) Zeige ausgehend von der allgemeinen Formel für Residuen meromorpher Funktionen (d.h. Funktionen der Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$), dass das Residuum einer Polstelle erster Ordnung durch $\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ gegeben ist!

   (b) Berechne alle Residuen der Funktion $f(z) = \frac{2z-z^2}{\left(iz+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\cdot(z^2+4)}$

2. **Residuensatz** Berechne folgende Integrale mithilfe des Residuensatzes:

   (a) $\int_0^\infty \frac{2ax^2}{(x^2+a^2)^4} dx$ *Achsensymmetrie zur y-Achse!*

   (b) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ *Integration entlang des Viertelkreises im 1. Quadranten!*

   (c) $\widehat{f(k)} = \frac{1}{(1+k^2)^2}$. Berechne $f(x)$ für $x > 0$!

   (d) Welchen geschlossenen Integrationsweg sollte man für das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$ wählen? Warum? Gib zusätzlich die Parametrisierung des Wegs an! *(Verallgemeinerung von b) !)*

3. **Singularitäten auf dem Integrationsweg**
Es soll das Integral $\int_{-\infty}^\infty dx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ unter Verwendung des Hauptwertintegrals berechnet werden.

   (a) Unter welcher Bedingung stimmen Integral und Hauptwertintegral überein? Warum braucht man hier ein Hauptwertintegral?

   (b) Begründe, dass $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = Re \frac{1-2e^{2ix}}{2x^2}$

   (c) Berechne $\int_{-\infty}^\infty dx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \text{Re } \mathscr{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{1-2e^{2iz}}{2z^2} dz$!