Differentialformen – ein kurzer Überblick

Definition und elementare Rechenregeln

Differentialformen sind von Ort zu Ort variierende äußere Formen, deren Variation glatt ist.

Um diesen Satz, der den Begriff der Differentialform sehr gut fasst, zu verstehen, muss zunächst geklärt werden, was man unter einer äußeren Form versteht.

Definition Äußere k-Form.

Eine k-lineare Abbildung $\varphi \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, also mit

$$\varphi(x_1, \ldots, x_j + \lambda y_j, \ldots, x_k) = \varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k) + \lambda\varphi(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_k)$$

für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, heißt *äußere k-Form*, falls sie antisymmetrisch ist:

$$\forall\, 1 \leq j < l \leq k,\ x_1, \ldots x_k \in \mathbb{R}^n :$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_l, \ldots, x_k) = -\varphi(x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_j, \ldots, x_k)$$

Zur Koordinatenfunktion $x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_j = x \cdot e_j = \langle e_j, x \rangle$ kann die Koordinatenform

$$\mathrm{d}x_j(v)(y) := v_j(y), \quad y \in \mathcal{U}$$

für ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ assoziiert werden. Jede 1-Form α kann mithilfe der Koordinatenformen dargestellt werden

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}x_i$$

Definition k-Form.

Für $\omega_{i_1 \ldots i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ heißt

$$\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

k-Form und ist definiert auf k Vektorfeldern $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$

$$\omega(v_1, \ldots, v_k)(y) := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(y) \det \begin{pmatrix} v_1(y)_{i_1} & \ldots & v_1(y)_{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_k(y)_{i_1} & \ldots & v_k(y)_{i_k} \end{pmatrix}$$

k-Formen machen also aus k Vektorfeldern eine reelle Funktion.

Der Raum aller k-Formen über $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ wird mit $\Omega^k(\mathcal{U})$ bezeichnet und hat die Dimension $\dim \Omega^k(\mathcal{U}) = \binom{n}{k}$.

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Differentialformen über $\mathcal{U}$ ist $\Omega^*(\mathcal{U}) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(\mathcal{U})$.

Definition Äußeres Produkt (Dachprodukt, *wedge*-Produkt) von $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$ und $\eta \in \Omega^l(\mathcal{U})$

$$\omega \wedge \eta := \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_l \le n}} \omega_{i_1 \ldots i_k} \eta_{j_1 \ldots j_l} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}$$

Dieses Produkt ist

(i) assoziativ: $(\omega \wedge \eta) \wedge \rho = \omega \wedge (\eta \wedge \rho)$

(ii) antikommutativ: $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$

Die äußere Ableitung (Cartan-Ableitung)

Definition Die lineare Abbildung $d : \Omega^*(\mathcal{U}) \to \Omega^*(\mathcal{U})$ mit

(i) $\mathrm{d}f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$ für $f \in \Omega^0(\mathcal{U}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$

(ii) $\mathrm{d}\omega := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{d}\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ für $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$

heißt *äußere Ableitung (Cartan-Ableitung)*.

Diese ist eine *Antiderivation*, d.h. für $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$ und $\beta \in \Omega^l(\mathcal{U})$ gilt

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$$

Außerdem gilt auf $\Omega^*(\mathcal{U})$:

$$\mathrm{dd} = 0$$

Beziehung zur klassischen Vektoranalysis

Da Differentialformen in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der klassischen Vektoranalysis darstellen, können alle Objekte der klassischen Vektoranalysis mit Differentialformen identifiziert werden.

1. Vektorfelder $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ können mit 1-Formen

   $$v^* := \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathrm{d}x_i$$

   identifiziert werden.

2. Einem Vektorfeld $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ kann außerdem eine $(n-1)$-Form

   $$\omega_v := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

   zugeordnet werden. Dabei bedeutet $\widehat{\mathrm{d}x_i}$, dass $\widehat{\mathrm{d}x_i}$ weggelassen wird.

3. Gradient als 1-Form

   $$(\nabla f)^* = \mathrm{d}f$$

4. Divergenz als n-Form

   $$\mathrm{div} v \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \mathrm{d}\omega_v$$

   Dabei bezeichnet man $\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \mathrm{d}\mathbb{R}^n$ als kanonische Volumenform.

5. Rotation als 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$

   $$\omega_{\mathrm{rot} v} = \mathrm{d}v^*$$

6. Mit $\mathrm{dd} = 0$ erhält man für $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R}^3)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$

   $$\begin{aligned} \mathrm{dd}v^* &= 0 \quad \text{d.h. div rot} v = 0 \\ \mathrm{dd}f &= 0 \quad \text{d.h. tor grad} f = 0 \end{aligned}$$