Lösung 1. Die Einheitssphäre werde parametrisiert mithilfe von Kugelkoordinaten

$$\Psi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\partial_1\Psi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} =: e_\theta \qquad \partial_2\Psi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} =: e_\phi$$

und

$$\partial_1\Psi(\theta, \phi) \times \partial_2\Psi(\theta, \phi) = \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} =: \sin\theta e_r$$

Damit ist

$$T_x S^2 = \operatorname{span}(e_\theta, e_\phi)$$
$$N_x S^2 = \operatorname{span}(e_r)$$

Die Zylinderoberfläche wird mittels Zylinderkoordinaten parametrisiert:

$$\Psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\partial_1\Psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: e_\varphi \qquad \partial_2\Psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_z$$

$$\partial_1\Psi(\varphi, z) \times \partial_2\Psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: e_\rho$$

Es ist also

$$T_x Z = \operatorname{span}(e_\varphi, e_z)$$
$$N_x Z = \operatorname{span}(e_\rho)$$

Lösung 2.

(a) Zur Bestimmung der GRAMschen Determinante benötigt man zunächst die Ableitungsmatrix

$$D\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\vartheta)\sin\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ (R + r\cos\vartheta)\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Damit ist der Maßtensor

$$D\mathcal{T}^T D\mathcal{T} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

und die GRAMsche Determinante

$$G_{\mathcal{T}} = \sqrt{\det D\mathcal{T}^T D\mathcal{T}} = \sqrt{r^2(R + r\cos\vartheta)^2} = r(R + r\cos\vartheta)$$

(b) Die Oberfläche des Torus berechnet man über

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{T}} \mathrm{d}S(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, G_{\mathcal{T}} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r(R + r\cos\vartheta) = 2\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\, r(R + r\cos\vartheta) \\ &= 4\pi^2 rR \end{aligned}$$

(c) Für das Vektorfeld $v(x) = x$ gilt $\operatorname{div} v(x) = \partial_1 x_1 + \partial_2 x_2 + \partial_3 x_3 = 3$. Daher bietet es sich an, den Satz von GAUSS/OSTROGRADSKI zu verwenden. Man überzeugt sich leicht davon, dass die Oberfläche des Torus geschlossen und orientierbar ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} v(x) \cdot n(x) \mathrm{d}S(x) &= \int_{V(\mathcal{T})} \operatorname{div} v(x) \mathrm{d}x = 3 \int_{V(\mathcal{T})} \mathrm{d}x \\ &= 3\mathrm{Vol}(\mathcal{T}) = 3 \int_0^r S_{r'} \mathrm{d}r' = 3 \cdot 4\pi^2 R \int_0^r r' \mathrm{d}r' \\ &= 6\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

Lösung 3. E ist ein Ellipsoid mit den Halbachsen $a = 1$, $b = 3$ und $c = 2$ um den Mittelpunkt $M = (1, 0, 0)$. Es gilt also $0 \leq x_1 \leq 2$, $-3 \leq x_2 \leq 3$ und $-2 \leq x_3 \leq 2$.

(i) Parametrisierung 1 beschreibt den Rand eines Ellipsoids mit passenden Halbachsen, aber mit Mittelpunkt bei $(-1, 0, 0)$. Bei der zweiten Parametrisierung stimmt zwar der Mittelpunkt, die Halbachsen sind aber zu klein. Somit bleibt nur mehr die dritte Parametrisierung. Hier stimmt alles und man kann sich durch Einsetzen in die Definitionsgleichung des Ellipsoids überzeugen, dass $(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{9}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 = 1$ erfüllt ist.

(ii) Der Fluss von $v(x) = (x_1 - 1,\, 2x_2,\, -x_3)$ durch den Rand ∂E ist

$$\int_{\partial E} v(x) \cdot n(x) \mathrm{d}S(x)$$

Da ∂E geschlossen und orientierbar ist, kann man den Satz von Gauss/ Ostrogradski anwenden. Mit div $v(x) = 2$ erhält man dann

$$\int_{\partial E} v(x) \cdot n(x) \mathrm{d}S(x) = \int_E \operatorname{div} v(x) \mathrm{d}x = \int_E 2\mathrm{d}x = 2\mathrm{Vol}(E) = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi abc = 16\pi$$

Wegen rot $v(x) \equiv 0$ kommen dann neben Antwort 2 auch 4 und 5 nicht in Frage.

Lösung 4. Da die Oberfläche des Kegels geschlossen und orientierbar ist, gilt nach dem Satz von Gauss/ Ostrogradski

$$\int_{\partial K} v(x,y,z) \cdot n\mathrm{d}S = \int_K \operatorname{div} v(x,y,z)\, \mathrm{d}^3x = \int_K (z + x - 1)\, \mathrm{d}^3x$$

Zur Berechnung dieses Volumenintegrals werden Zylinderkoordinaten

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

eingeführt. Nach dem Transformationssatz für Volumenintegrale ist dann wegen $|\det D\Psi| = \rho$

$$\begin{aligned} \int_K (z + x - 1)\, \mathrm{d}^3x &= \int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{\frac{1}{2}(2-z)} \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \rho(z + \rho\cos\varphi - 1) \\ &= 2\pi \int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{\frac{1}{2}(2-z)} \mathrm{d}\rho\, \rho(z-1) = \frac{\pi}{4} \int_0^2 \mathrm{d}z\, (2-z)^2(z-1) \\ &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Kennt man die Koordinaten des Schwerpunktes $S = (s_x, s_y, s_z) = (0, 0, h/4)$ und das Volumen $\mathrm{Vol}(K) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ des Kegels, hätte man sich die Integration sparen können. Es gilt nämlich

$$\int_K x_j \, \mathrm{d}^3x = \mathrm{Vol}(K) s_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

und damit

$$\int_K (z + x - 1)\mathrm{d}^3x = \mathrm{Vol}(K)(s_z + s_x - 1) = -\frac{\pi}{3}$$

Lösung 5. Zuerst wir die Geschwindigkeit des Gases bestimmt. Diese ist

$$v = \mathrm{rot}\ w = (0, 0, 2)$$

Zur Berechnung des Flusses $\int_{\mathcal{B}} v(x) \cdot n(x)\mathrm{d}S(x)$ parametrisiert man $\mathcal{B}$ durch Kugelkoordinaten

$$\Psi : \left[0, \pi - \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)\right] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$$

mit Gramscher Determinante $G_\Psi = R^2 \sin\theta$ und Normalenvektor
$n = e_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Damit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} v(x) \cdot n(x)\mathrm{d}S(x) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi-\arcsin(d/2R)} \mathrm{d}\theta\, R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi-\arcsin(d/2R)} \mathrm{d}\theta\, R^2 \sin\theta\, 2\cos\theta \\
&= 4\pi R^2 \int_{-\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta)\ \cos\theta \\
&= \frac{\pi d^2}{2}
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde dabei die Substitution $\theta \to \cos\theta$ durchgeführt und bei den Grenzen verwendet, dass $\cos(\pi - \arcsin(d/2R)) = \cos\pi \cos\arcsin(d/2R) + \sin\pi \sin\arcsin(d/2R) = -\sqrt{1 - d^2/4R^2}$.

Will man zur Berechnung des Flusses durch $\mathcal{B}$ den Satz von Gauss Ostrogradski anwenden, ist zu beachten dass $\mathcal{B}$ nicht geschlossen ist. Es gilt aber

$$\int_{\mathcal{B}} v(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}S(x) + \int_{\mathcal{D}} v(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}S(x) = \int_{V(\mathcal{B}\cup\mathcal{D})} \mathrm{div}\ v(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{D}$ die Öffnung des Ballons und $V(\mathcal{B} \cup \mathcal{D})$ das von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$ eingeschlossene Volumen.

Es ist also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} v(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}S(x) &= -\int_{\mathcal{D}} v(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}S(x) \\
&= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{d/2} \mathrm{d}r\, v(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z_0) \cdot (0, 0, -r) \\
&= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{d/2} \mathrm{d}r\, (-2r) = \frac{\pi d^2}{2}
\end{aligned}$$

Bei der Ausführung der Integration wurden ebene Polarkoordinaten in der Ebene der Ballonöffnung $z = z_0$ verwendet. Zu beachten ist auch, dass aufgrund der Orientierung von $\mathcal{B}$ nach außen $\mathcal{D}$ in *negative* z-Richtung orientiert sein muss.

Zuletzt berechnet man die Zirkulation von v entlang des Randes $\partial\mathcal{B}$, der durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\cos t \\ \frac{d}{2}\sin t \\ z_0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird.

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\mathcal{B}} w(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} w(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{2}
\end{aligned}$$

Da alle Bedingungen für die Anwendung des Satzes von Stokes erfüllt sind, gilt immer

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\mathcal{B}} w(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{B}} \mathrm{rot}\; w(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}S(x) \\
&= \int_{\mathcal{B}} v(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}S(x) \\
&= \int_{\tilde{\mathcal{D}}} v(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}S(x)
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathcal{D}}$ die *nach oben* orientierte Öffnung des Ballons ist.

Lösung 6. Die Oberfläche $\partial\mathcal{E}$ des Ellipsoids ist geschlossen, daher gilt nach dem Satz von Gauss/ Ostrogradski

$$\int_{\partial\mathcal{E}} v(x,y,z)\cdot n(x,y,z)\mathrm{d}S(x,y,z) = \int_{\mathcal{E}} \mathrm{div}\ v(x,y,z)\,\mathrm{d}^3x = 0$$

wegen div $v(x,y,z) = -2xz + 2yz + 2xz - 2yz = 0$.

Alternativ hätte man sich die Mühe machen können, das Ellipsoid zu parametrisieren, z.B. durch

$$\Psi : [0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (\theta,\phi) \mapsto (a\sin\theta\cos\phi, b\sin\theta\sin\phi, c\cos\theta)$$

und den Fluss direkt zu berechnen. Dies soll hier nicht näher ausgeführt werden.

Lösung 7. Der Rand $\partial\mathcal{P}$ ist ein Kreis $\mathcal{D}$ mit Radius 2 in der Ebene $z = 0$ und wird parametrisiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Zirkulation von v entlang $\partial\mathcal{P}$ ist dann

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\mathcal{P}} v(x,y,z)\cdot\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} v(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -4\cos t \\ 4\sin^2 t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -8\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -8\pi\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{P}} v(x,y,z)\cdot\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{rot}\ v(x,y,z)\cdot n(x,y,z)\,\mathrm{d}S(x,y,z)$$

Da der Paraboloidmantel $\mathcal{P}$ und der Kreis $\mathcal{D}$ denselben Rand haben, ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}} \mathrm{rot}\ v(x,y,z)\cdot n(x,y,z)\,\mathrm{d}S(x,y,z) &= \int_{\mathcal{D}} \mathrm{rot}\ v(x,y,z)\cdot n(x,y,z)\,\mathrm{d}S(x,y,z) \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\mathrm{d}r \begin{pmatrix} 2r\sin\varphi \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\mathrm{d}r(-2r) = -8\pi\end{aligned}$$

wobei rot $v(x,y,z) = (2y,\ 1,\ -2)$ verwendet wurde.

Alternativ kann man auch den Paraboloidmantel parametrisieren mittels

$$\Psi : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 4-r^2 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor ergibt sich aus

$$\partial_r\Psi \times \partial_\varphi\Psi = r \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man überprüft leicht, dass die Orientierung des Normalenvektors nach außen passt. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \text{rot } v(x,y,z)\cdot n(x,y,z)\,\mathrm{d}S(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \mathrm{d}r\, r \begin{pmatrix} 2r\sin\varphi \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \mathrm{d}r\,(4r^3\sin\varphi\cos\varphi - 2r) = -8\pi \end{aligned}$$

Lösung 8. Es ist rot $v(x) = (0,\ 0,\ 2)$. Das Normalenfeld an das Möbius-Band $\mathcal{S}$ ergibt sich aus

$$\partial_1 S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v\cos 2v \\ \cos v \sin 2v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad \partial_2 S(u,v) = \begin{pmatrix} -2\sin 2v(2+u\cos v) - u\sin v\cos 2v \\ 2\cos 2v(2+u\cos v) - u\sin v\sin 2v \\ u\cos v \end{pmatrix}$$

$$n = \partial_1 S(u,v) \times \partial_2 S(u,v) = \begin{pmatrix} u\sin 2v - 2\sin v\cos 2v(2+u\cos v) \\ -u\cos 2v - 2\sin v\sin 2v(2+u\cos v) \\ 2\cos v(2+u\cos v) \end{pmatrix}$$

Damit ist der Fluss der Rotation von v durch $\mathcal{S}$ (Wirbelstärke)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \text{rot } v(x)\cdot n(x)\mathrm{d}S(x) &= \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v\, 4\cos v(2+u\cos v) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v\, 8\cos v + \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v\, 4u\cos^2 v \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

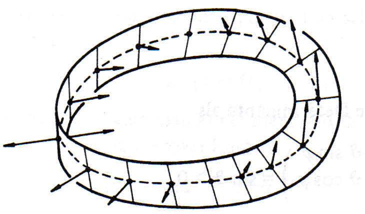
Der Rand von $\mathcal{S}$ lässt sich durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos 2t \\ (2+\cos t)\sin 2t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, 2\pi]$ beschreiben. (In der Parametrisierung des MÖBIUS-Bandes wurde $u = 1$ gesetzt) Damit ist die Zirkulation von $v(x)$ entlang $\partial\mathcal{S}$ gleich

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\mathcal{S}} v(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(2+\cos t)\sin 2t \\ (2+\cos t)\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2t(2+\cos t) - \sin t \cos 2t \\ 2\cos 2t(2+\cos t) - \sin t \sin 2t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, 2(2+\cos t)^2 = 18\pi
\end{aligned}$$

Der Satz von STOKES ist hier nicht anwendbar, weil das MÖBIUS-Band eine nicht-orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, also kein stetiges Normalenfeld besitzt.



Lösung 9.

(i) $v^\star = v_1(x)\mathrm{d}x_1 + v_2(x)\mathrm{d}x_2 + \cdots + v_n(x)\mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^n v_i(x)\mathrm{d}x_i$

(ii) $v^\star = x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2 + \cdots + x_n\mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^n x_i\mathrm{d}x_i$

(iii) $v^\star = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$

(iv) $v^\star = e^{-z}\mathrm{d}x + xyz\mathrm{d}z$