Aufgabe 1. Geben Sie für die Einheitskugel S^2 und den Mantel eines Zylinders Z mit Radius 1 den Tangentialraum und den Normalraum im Punkt x an.

Aufgabe 2. Für feste Radien $r, R > 0$ wird die Oberfläche eines Torus parametrisiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{T} : [0, 2\pi]^2 &\to \mathbb{R}^3,\\ (\varphi, \vartheta) &\mapsto ((R + r\cos\vartheta)\cos\varphi, (R + r\cos\vartheta)\sin\varphi, r\sin\vartheta)\end{aligned}$$

Bestimmen Sie

(a) die GRAMsche Determinante der Parametrisierung

(b) die Oberfläche S des Torus

(c) den Fluss des Vektorfeldes $v(x) = x$ durch die Oberfläche

Aufgabe 3. Seien $E := \{x \in \mathbb{R}^3 | (x_1 - 1)^2 + \frac{1}{9}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 \leq 1\}$ und $v(x) = (x_1 - 1, 2x_2, -x_3)$.

(i) Welche der Abbildungen

$$\square \begin{pmatrix} \cos u \cos v - 1 \\ 3\sin u \cos v \\ 2\sin v \end{pmatrix}, \quad \square \begin{pmatrix} \cos u \cos v + 1 \\ \frac{1}{3}\sin u \cos v \\ \frac{1}{2}\sin v \end{pmatrix}, \quad \square \begin{pmatrix} \cos u \cos v - 1 \\ 3\sin u \cos v \\ 2\sin v \end{pmatrix}$$

ist bei passender Wahl der Intervalle für u und v eine Parametrisierung von ∂E.

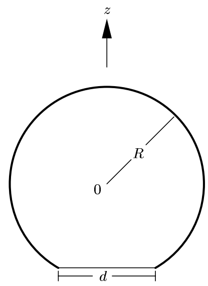
(ii) Welche der Integrale

$$\square \int_E 2\,\mathrm{d}x, \quad \square \int_E 4\,\mathrm{d}x, \quad \square \int_E \mathrm{div} v(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\square \int_{\partial E} \mathrm{rot} v(x) \cdot n(x)\,\mathrm{d}S(x), \quad \square \oint_\epsilon \mathrm{rot} v(x) \cdot \mathrm{d}x$$

beschreiben den Fluss von v durch ∂E richtig? Dabei ist die geschlossene Kurve ϵ die passend orientierte Ellipse $\frac{1}{9}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 = 1$ in der Ebene $x_1 = 0$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $v(x, y, z) = (xz, xy, -z)$ aus dem Kreiskegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}(2 - z)^2,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

Aufgabe 5. Ein Heißluftballon habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$ (s. Skizze). Das heiße Gas dringt durch die poröse Oberfläche mit der Geschwindigkeit $v = \mathrm{rot} w$, wobei $w = (-y, x, 0)$. Man berechne den Fluss von v durch die Ballonoberfläche $\mathcal{B}$ einmal direkt und über den Satz von Gauss/Ostrogradski. Berechnen Sie außerdem das Wegintegral $\int_{\partial\mathcal{B}} w \cdot \mathrm{d}x$ wobei $\partial\mathcal{B}$ der kreisförmige Rand der Öffnung ist. Sind die beiden Ergebnisse immer gleich?



Aufgabe 6. Man berechne den Fluss des Vektorfeldes $v(x,y,z) = (yz^2 - x^2z,\, y^2z,\, xz^2 - yz^2)$ durch die Oberfläche des vom Ursprung weg orientierten Ellipsoids $\mathcal{E} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$.

Aufgabe 7. Gegeben sei der vom Ursprung weg orientierte Paraboloid-Mantel $\mathcal{P} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z = 4 - x^2 - y^2\}$. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $v(x,y,z) = (z, -2x, y^2)$ entlang $\partial\mathcal{P}$ direkt und mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 8. Berechnen Sie für das Vektorfeld $v(x) = (-x_2, x_1, 0)$ und das Möbius-Band

$$S : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (2 + u\cos v)\cos 2v \\ (2 + u\cos v)\sin 2v \\ u \sin v \end{pmatrix}$$

die beiden Seiten im Satz von Stokes. Welche Voraussetzung ist hier verletzt?

Aufgabe 9. Geben Sie die assoziierte 1-Form zu folgenden Vektorfeldern an:

(i) $v(x) = (v_1(x),\, v_2(x), \ldots,\, v_n(x))$, mit $x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $v(x) = x$, mit $x \in \mathbb{R}^n$

(iii) $v(x,y,z) = (-y,\, x,\, 0)$

(iv) $v(x,y,z) = (e^{-z},\, 0,\, xyz)$