Ferienkurs Analysis 1 - Probeklausur

19.3.2010

1 Aufgabe

1. Zeigen Sie für $N \neq 1$, dass die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \tag{1}$$
konvergiert.

2. Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{2}$$
konvergiert. *Hinweis: Auch wenn Sie nicht gezeigt haben, dass* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ *konvergiert, dürfen Sie dies hernehmen.*

3. Warum kann die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nicht mit dem Quotienten-Kriterium gezeigt werden?

Lösung:

1. Per Parzialbruchzerlegung folgt
$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}. \tag{3}$$
Damit lässt sich eine Teleskopsumme aufstellen:
$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{1}{m}. \tag{4}$$
Somit lässt sich der Grenzwert ausrechnen und damit die Konvergenz zeigen:
$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1. \tag{5}$$

2. Da gilt
$$\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2, \tag{6}$$
ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ eine Majorante von von $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Da eine Reihe konvergiert, wenn Sie ohne eine endliche Anzahl an Summanden konvergiert, konvergiert auch die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{7}$$

3. Damit das Quotienten-Kriterium angewendet werden kann, muss gelten:

$$\exists q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1,\ \text{sodass gilt: } \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| \leq q\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Allerdings gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\right| = \left|\frac{1}{(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})^2}\right| = 1. \tag{9}$$

Somit existiert kein q, sodass die Bedingung des Quotienten-Kriterium für alle n gilt, da sich immer ein $N \in \mathbb{N}$ finden lässt, sodass gilt:

$$q < n < 1\ \forall n \geq N. \tag{10}$$

2 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n} \tag{11}$$

konvergiert.

Lösung:
Es gilt

$$0 < \frac{2n}{3n+1} < \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \text{ für } n \geq 1. \tag{12}$$

Damit folgt

$$0 < \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n} < \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}}_{=:b_n}. \tag{13}$$

Wegen

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1 \tag{14}$$

konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ (Quotientenkriterium). Da diese nach (13) eine Majorante von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n}$ ist, konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n}$.

3 Aufgabe

Berechnen Sie folgende Reihe und stellen Sie sie in kartesischer Darstellung dar:

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{e^{ik\frac{\pi}{2}}}{2^k} \tag{15}$$

Lösung:
Da $|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}| < 1$ ist, kann man die geometrische Summenformel anwenden:
$\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{e^{ik\frac{\pi}{2}}}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}} - 1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{e^{i\pi}}{4} = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} - 1 - \frac{i}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{2-i} + \frac{-4-2i+1}{4} = \frac{8+(2-i)(-3-2i)}{4(2-i)} = \frac{8-6-2+3i-4i}{8-4i}$
$= \frac{-i}{8-4i} = \frac{-8i-4}{64+16} = \frac{-1-2i}{20} = -\frac{1}{20} - i\frac{1}{20}$
Dabei wurde verwendet, dass $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$

4 Aufgabe

Gegeben ist eine Funktion $f(x) = \ln\left(|\frac{x-1}{x}| + 1\right)$
a) Man bestimme den Definitionsbereich D_f von f und zeige, dass $f(x) \geq 0$ in D_f liegt.
Lösung: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \ln\left(|\frac{x-1}{x}| + 1\right) = \ln\left(|1 - \frac{1}{x}| + 1\right) \overset{\text{f(x)=ln(x) ist streng monoton steigend}}{>} \ln 1 = 0$

b) Für welche $x \in D_f$ ist f differenzierbar, für welche nicht differenzierbar (Begründung)?
Lösung: Ableitungen:
$x < 0$: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x} + 1\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{x}(2x-1)} = \frac{1}{x(2x-1)}$
$0 < x < 1$: $f(x) = \ln\left(-\frac{x-1}{x} + 1\right) = \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}$
$x > 1$: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x} + 1\right) \Rightarrow f'(x) == \frac{1}{x(2x-1)}$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 1$
Also ist $f(x)$ nicht differenzierbar für $x = 1$

c) In welchen Teilintervallen von D_f ist f streng monoton steigend oder streng monoton fallend?
Lösung:
$x < 0$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ streng monoton steigend
$0 < x < 1$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend
$x > 1$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ streng monoton steigend

d) Man berechne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
Lösung:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(|\frac{x-1}{x}| + 1\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(|\frac{1-\frac{1}{x}}{1}| + 1\right)\right) = \ln 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$
e) Man stelle f in einer sorgfältigen Skizze dar.

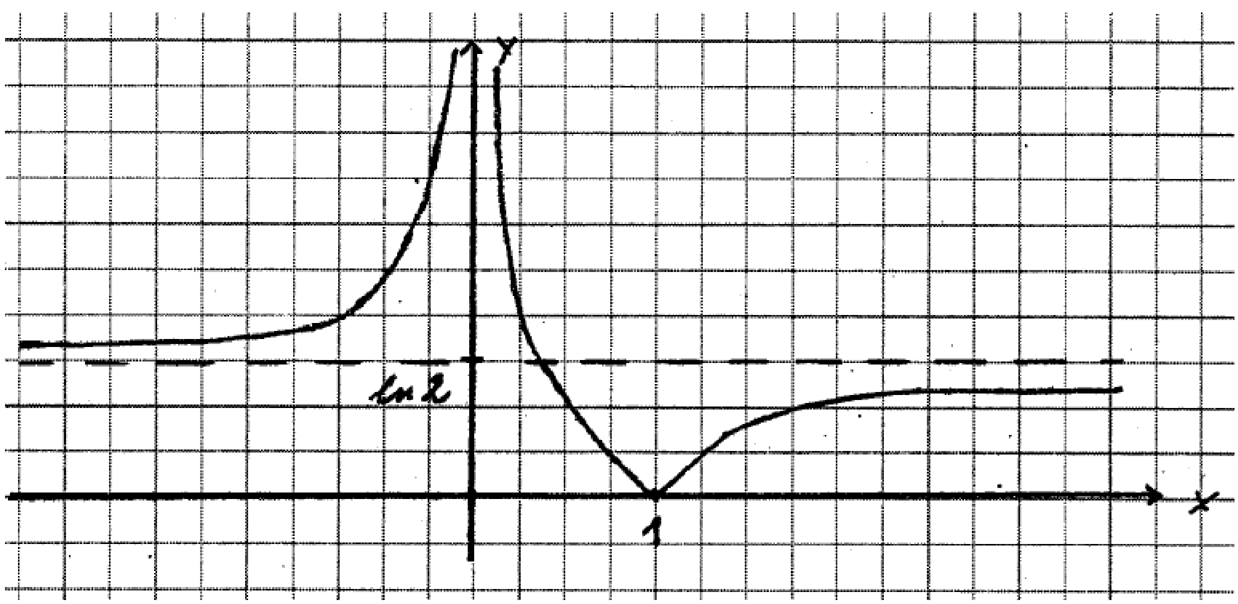

Abbildung 1: Skizze von $f(x)$

5 Aufgabe

Man zeige, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (k ist eine natürliche Zahl >1) auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist, aber nicht Lipschitz-stetig. Hinweis: Für die gleichmäßige Stetigkeit benutze man die Ungleichung: $|\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b}| \leq \sqrt[k]{|a-b|}$ (ohne Beweis).
Lösung:
Gleichmäßige Stetigkeit:
$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| \overset{!}{\leq} \epsilon$
$|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| \overset{Hinweis}{\leq} \sqrt[k]{|x - x_0|} \Rightarrow |x - x_0| \leq \epsilon^k =: \delta$
Damit gilt $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| < \epsilon$
Das gewählte δ hängt nicht von x_0 ab, also handelt es sich um gleichmäßige Stetigkeit, die für $\forall x, x_0 \in X$ gilt (Vgl. Übung am Mittwoch: für gewöhnlich stetige Funktionen hat man ein δ bekommen, das von x_0 abhängig war).
Lipschitz Stetigkeit:
Um zu zeigen, dass die Funktion nicht Lipschitz stetig ist, betrachte die Lipschitz Stetigkeit am Nullpunkt:
$\frac{|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{0}|}{|x-0|} = \frac{|\sqrt[k]{x}|}{|x|} = |x^{\frac{1}{k}-1}| = |x^{\frac{1-k}{k}}| \overset{x \geq 0}{=} x^{\frac{1-k}{k}} \overset{!}{\leq} L \Rightarrow \frac{1}{x^{1-\frac{1}{k}}} \leq L \quad , L > 0$
Diese Bedingung ist nicht erfüllt, wenn $x \to 0$, weil dort der Ausdruck $\frac{1}{x^{1-\frac{1}{k}}} \to \infty$. Somit ist die Funktion nicht Lipschitz stetig.

6 Aufgabe

Sei $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = \begin{cases} sin^2(x) & f\ddot{u}r\, x \leq 0 \\ \sqrt{sin(x)}cos(x) & f\ddot{u}r\, x > 0 \end{cases}$

a) Bestimmen Sie $F : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, mit $F(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} f(x)dx$.

Lösung:
Um die erste Stammfunktion zu finden, muss man partiell integrieren:
$\int sin^2(x)dx = -cos(x)sin(x) + \int cos^2(x)dx = -cos(x)sin(x) + \int (1 - sin^2(x)dx = -cos(x)sin(x) + x - \int sin^2(x)dx$
Das lässt sich umstellen zu: $2\int sin^2(x)dx = -cos(x)sin(x) + x \Rightarrow \int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - cos(x)sin(x))$
Also für $x \leq 0$: $F(x) = \frac{1}{2}(x - cos(x)sin(x))|_{-\pi}^{x} = \frac{1}{2}(x - cos(x)sin(x) + \pi + sin(-\pi)cos(-\pi)) = \frac{1}{2}(x - cos(x)sin(x) + \pi)$
insbesondere: $F(0) = \frac{\pi}{2}$

Für die zweite Stammfunktion muss man $t = sin(x)$, $dt = cos(x)dx$ substituieren:
$\int \sqrt{sin(x)}cos(x)dx = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(sin(x))^{\frac{3}{2}}$. Damit folgt für $x > 0$:
$F(x) = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^x \sqrt{sin(x)}cos(x)dx = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(sin(x))^{\frac{3}{2}}|_0^x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(sin(x))^{\frac{3}{2}}$
Also: $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - cos(x)sin(x) + \pi) & f\ddot{u}r\, x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(sin(x))^{\frac{3}{2}} & f\ddot{u}r\, x > 0 \end{cases}$

b) Ist $F(x)$ gleichmäßig stetig und differenzierbar?

Lösung:
Da $F(x)$ als Verknüpfung stetiger Funktionen außerhalb der 0 auf jeden Fall stetig ist, betrachten wir $x = 0$:
$\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{2}(x - cos(x)sin(x) + \pi) = \frac{\pi}{2}$
$\lim\limits_{x \to 0+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0-+} \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(sin(x))^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{2}$
Damit ist $F(x)$stetig. Weil $F(x)$ außerdem auf einem kompakten Intervall definiert ist, muss es auch gleichmäßig stetig sein.

Weil $F'(x) = f(x)$ gilt, überprüfen wir nur, ob $f(x)$ stetig ist. Auch $f(x)$ ist außerhalb des Ursprungs stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen. Dort gilt jedoch: $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = sin^2(0) = 0$
$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \sqrt{sin(0)}cos(0) = \sqrt{0}1 = 0$
Somit ist $f(x)$ stetig und $F(x)$ differenzierbar.

7 Aufgabe

Sei $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 2c & f\ddot{u}r\ -1 \leq x \leq c \\ x^2 + \frac{1}{2} & f\ddot{u}r\, c < x \leq 1 \end{cases}$ und $c \in]-1,1[$

a) Welchen Wert muss c haben, damit $f(x)$ stetig ist?

Lösung:
Die einzige mögliche Unstetigkeitsstelle ist bei $x = c$. Daraus ergibt sich: $2c = c^2 + \frac{1}{2}$, also: $c = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4-2}) = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Nur der Wert $c = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ liegt im für c erlaubten Bereich.

b) Welchen Wert muss c haben, damit $f'(x)$ stetig ist?

Lösung:

Zuerst bestimmt man die erste Ableitung: $f'(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ -1 \leq x \leq c \\ 2x & f\ddot{u}r\, c < x \leq 1 \end{cases}$
An der Stelle $x = c$ muss also gelten: $2c = 0$, also $c = 0$.

c) Bestimmen Sie $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(x)$

Lösung:
Die Stammfunktionen für die beiden Bereiche sind $2cx$ und $\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}$. Also gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 2cx|_{-1}^{x} = 2cx + 2c = 2c(x+1) & f\ddot{u}r\ -1 \leq x \leq c \\ 2c(c+1) + (\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2})|_{c}^{x} = 2c^2 + 2c + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} - \frac{c^3}{3} - \frac{c}{2} = -\frac{c^3}{3} + 2c^2 + \frac{3}{2}c\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} & f\ddot{u}r\, c < x \leq 1 \end{cases}$$