Ferienkurs Analysis 1 - Probeklausur

19.3.2010

1 Aufgabe

1. Zeigen Sie für $N \neq 1$, dass die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \tag{1}$$
konvergiert.

2. Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{2}$$
konvergiert. *Hinweis: Auch wenn Sie nicht gezeigt haben, dass* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ *konvergiert, dürfen Sie dies hernehmen.*

3. Warum kann die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nicht mit dem Quotienten-Kriterium gezeigt werden?

2 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n} \tag{3}$$
konvergiert.

3 Aufgabe

Berechnen Sie folgende Reihe und stellen Sie sie in kartesischer Darstellung dar:
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^{ik\frac{\pi}{2}}}{2^k} \tag{4}$$

4 Aufgabe

Gegeben ist eine Funktion $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right| + 1\right)$
a) Man bestimme den Definitionsbereich D_f von f und zeige, dass $f(x) \geq 0$ in D_f liegt.

b) Für welche $x \in D_f$ ist f differenzierbar, für welche nicht differenzierbar (Begründung)?

c) In welchen Teilintervallen von D_f ist f streng monoton steigend oder streng monoton fallend?

d) Man berechne $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

e) Man stelle f in einer sorgfältigen Skizze dar.

5 Aufgabe

Man zeige, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (k ist eine natürliche Zahl >1) auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist, aber nicht Lipschitz-stetig. Hinweis: Für die gleichmäßige Stetigkeit benutze man die Ungleichung: $|\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b}| \leq \sqrt[k]{|a-b|}$ (ohne Beweis).

6 Aufgabe

Sei $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = \begin{cases} sin^2(x) & für\, x \leq 0 \\ \sqrt{sin(x)}cos(x) & für\, x > 0 \end{cases}$

a) Bestimmen Sie $F : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, mit $F(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} f(x)dx$.

b) Ist $F(x)$ gleichmäßig stetig und differenzierbar?

7 Aufgabe

Sei $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 2c & für\; -1 \leq x \leq c \\ x^2 + \frac{1}{2} & für\, c < x \leq 1 \end{cases}$ und $c \in]-1, 1[$

a) Welchen Wert muss c haben, damit $f(x)$ stetig ist?

b) Welchen Wert muss c haben, damit $f'(x)$ stetig ist?

c) Bestimmen Sie $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(x)$