Aufgaben zur Integration

1 Aufgaben zur Substitution

a)

$$\int xe^{-x^2}dx$$

Lösung:
Hier bietet es sich an, $t = x^2$, $dt = 2xdx$ zu substituieren:
$\int xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$

b)

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

(Ergebnis: $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arcsin(x) + c'$)

Lösung:
Das angegebene Ergebnis weist schon darauf hin, die Substitution $x = sin(t)$ zu verwenden. ($dx = cos(t)dt$)
$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt \overset{p.I.}{=} sin(t)cos(t)+\int sin^2(t)dt = sin(t)cos(t)+\int \left(1-cos^2(t)\right)dt = sin(t)cos(t) + t - \int cos^2(t)dt + c$
$2\int cos^2(t)dt = sin(t)cos(t) + t + c$
$\int cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\left(sin(t)cos(t) + t + c\right) = \frac{1}{2}\left(sin(arcsin(x))\sqrt{1-sin^2(arcsin(x))} + arcsin(x)\right) + c' = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arcsin(x) + c'$

c)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

Hinweis: $arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Lösung:
Der Faktor x erlaubt, $t = x^2$ zu substituieren, $dt = 2xdx$
$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \overset{Hinweis}{=} \frac{1}{2}arcsin(t) + c = \frac{1}{2}arcsin(x^2) + c$

2 Aufgaben zur partiellen Integration

a)

$$\int x^2e^{2x}dx$$

Lösung:
$\int x^2e^{2x}dx \overset{p.I.}{=} \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int \frac{1}{2}2xe^{2x}dx \overset{p.I.}{=} \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$

b)

$$\int x^n e^x dx$$

Lösung:
$\int x^ne^xdx \overset{p.I.}{=} x^ne^x - \int nx^{n-1}e^xdx \overset{p.I.}{=} x^ne^x - nx^{n-1}e^x + \int n(n-1)x^{n-2}e^xdx \overset{p.I.}{=} ... = e^x\left(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - ... \pm n!\right) + c = e^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} + c$

c)

$$\int x^3 ln(x)dx \tag{1}$$

Lösung:
Hier muss wieder partiell integriert werden:
$\int x^3 ln(x)dx = \frac{1}{4}x^4 ln(x) - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}\left(x^4 ln(x) - \frac{1}{4}x^4\right) + c$

3 Funktionen mit besonderen Eigenschaften

Finden Sie
a) eine Funktion, die ∞ oft differenzierbar, aber nicht integrierbar ist.
b) eine Folge von Regelfunktionen $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, die punktweise gegen 0 konvergieren und deren Integral $\lim_{a\to\infty} \int_0^a f_n(x) = 1$ ist.
c) eine Funktion, die nicht stetig ist, deren Ableitung jedoch stetig fortsetzbar ist.
d) eine Regelfunktion, die zwar integrierbar, aber nicht stetig ist. Das Integral soll differenzierbar sein.

Lösung:

a) Die Funktion $f :]0, a[\mapsto]0, \infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x}$ ist beliebig oft differenzierbar, das Integral $\int_0^a f(x)$ ist jedoch nicht definiert.
b) Die Folge $f_n : \mathbb{R}_+ \mapsto \{0, 1\}, \; f_n(x) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\, n < x \leq n+1 \\ 0 & sonst \end{cases}$ konvergiert an jedem Punkt gegen 0, wenn man jedoch über die gesamte positive Achse integriert, erhält man den Wert 1
c) Ein Beispiel wäre $f(x) = \begin{cases} x & f\ddot{u}r\, x < 0 \\ x+1 & f\ddot{u}r\, x \geq 0 \end{cases}$ die Ableitung ist überall $f'(x) = 1$ und deshalb auch am Ursprung durch 1 stetig fortsetzbar. Allerdings ist $f(x)$ selbst am Ursprung nicht stetig.
d) Hier kann man eine Funktion nehmen, die an sich stetig ist, nur an einem einzelnen Punkt einen anderen Wert annimmt: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \; f(x) = \begin{cases} 2 & f\ddot{u}r\, x = 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$. Integriert man f, so erhält man: $F(x) = \int_a^x f(x)dx = 0$, was ja differenzierbar ist. (Diese Aufgabe kam auch in der Klausur dran)

4 Funktionenfolge

Sei f_n eine Folge in $R[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.
a) Unter welcher Voraussetzung gilt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$?

Lösung:
Die Identität gilt nur, wenn $f_n(x)$ gleichmäßig konvergiert. Ein Gegenbeispiel für eine nur punktweise konvergierende Funktionenfolge liefert die Vorlesung: $f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n, & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Diese Folge konvergiert zwar punktweise gegen 0, das Integral $\int_0^1 f_n(x)$ ist aber immer 1.

Man betrachte im Folgenden die Folge:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\, x < -\frac{1}{n} \\ n(nx+1) & f\ddot{u}r\, -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ n(1-nx) & f\ddot{u}r\, 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{2}$$

b) Zeichnen Sie $f_4(x)$.

Lösung:

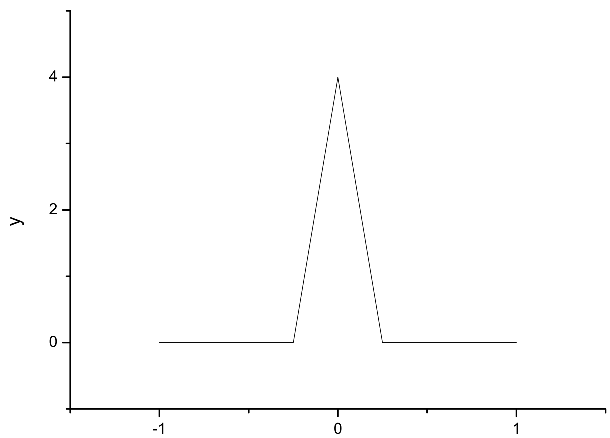

Abbildung 1: Graph von $f_4(x)$

c) Berechnen Sie $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(x')dx'$. Ist $F_n(x)$ stetig (nicht F(x))?

Lösung:
Da $f_n(x)$ keine Singularitäten besitzt, ist auch das Integral über die Funktion stetig.
Man kann das Integral berechnen, indem man die Stammfunktionen für die Bereiche berechnet, wo $f_n \neq 0$ ist. An den Stellen $x = 0, \frac{1}{n}$ muss man beachten, dass man bei dem Wert weiterintegriert, den man davor hatte. Für $x \geq 0$ erhält an deshalb $\int_{-1}^{x} f_n(x')dx' = \int_{-1}^{0} f_n(x')dx' + \int_{0}^{x} f_n(x')dx' = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} f_n(x')dx'$, für $x \geq \frac{1}{n}$ erhält man $\int_{-1}^{x} f_n(x')dx' = \int_{-1}^{\frac{1}{n}} f_n(x')dx' + \int_{\frac{1}{n}}^{x} f_n(x')dx' = 1 + \int_{\frac{1}{n}}^{x} f_n(x')dx'$:

$$F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(x')dx' = \begin{cases} 0 & \textit{für}\, x \leq -\frac{1}{n} \\ (\frac{n^2x^2}{2} + nx)|_{-\frac{1}{n}}^{x} = \frac{n^2x^2}{2} + nx + \frac{1}{2} & \textit{für}\, -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + (nx - \frac{n^2x^2}{2})|_0^x = \frac{1}{2} + nx - \frac{n^2x^2}{2} & \textit{für}\, 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \textit{für}\, \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

Weil man eine Funktion ohne Singularitäten (Achtung: Der Grenzwert $f(x)$ hat tatsächlich eine Singularität bei 0, die Folgenglieder aber nicht!) integriert, wird auch $F_n(x)$ stetig.

d) Ist $F_n(x)$ differenzierbar (nicht $F(x)$)?

Lösung:
Um die Differenzierbarkeit zu testen, bilden wir die Ableitungen für verschiedenen Bereiche des Definitionsbereichs, die natürlich wieder $f_n(x)$ liefern. Weil $f_n(x)$ stetig ist, ist $F_n(x)$ auch differenzierbar.

e) Gegen welche Funktion $F(x)$ konvergiert $F_n(x)$? Konvergiert die Folge gleichmäßig?

Lösung:
Für $x < -\frac{1}{n}$ ist $F_n(x) = 0$ und für $x > \frac{1}{n}$ ist $F_n(x) = 1$. Deshalb ist der Bereich dazwischen interessant, um die Konvergenz zu überprüfen. Für $n \to \infty$ bleibt nur die 0 in diesem Bereich. Deshalb konvergieren alle Punkte mit $x < 0$ punktweise gegen 0, alle Punkte mit $x > 0$ gegen 1. Der Funktionswert an der Stelle 0 bleibt jedoch $\frac{1}{2}$.
Sei $\epsilon = 0,25$. Für jede Funktion $F_n(x)$ kann man jedoch eine Umgebung U des Ursprungs finden, in der Funkti-

onswerte zwischen $0,25$ und $0,75$ liegen (d. h. $|f_n(x) - f(x)| > 0,25 = \epsilon$. Das widerspricht dann der Bedingung für gleichmäßige Konvergenz, dass es für jede Schranke $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ geben muss, sodass. $\forall n > N, x \in U : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Die Funktionenfolge konvergiert somit punktweise (und nicht gleichmäßig) gegen die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\, x < 0 \\ \frac{1}{2} & f\ddot{u}r\, x = 0 \\ 1 & f\ddot{u}r\, x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Bemerkung: Man nennt diese Funktion auch Θ-Funktion.

5 Noch mehr Rechenaufgaben

Die Aufgaben ab Aufgabenteil c) sind nur noch zusätzliche Rechenaufgaben, um die Integration zu üben, wirklich Neues kommt dort nicht mehr vor.

a)

$$\int_{-1}^{1} tan(x) e^{x^2} dx$$

Lösung:
Da der Integrand das Produkt ein Produkt aus einer geraden (e^{x^2}) und einer ungeraden Funktion ($tan(x)$) ist, ist er selbst auch ungerade. Das Integral wird also zu 0:
$\int_{-1}^{1} tan(x) e^{x^2} dx = 0$

b)

$$\int \frac{x+1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2} dx$$

Hinweis: $(x^2 + 2)$ ist ein Faktor des Nenners.

Lösung:
Diese Aufgabe ist ein typischer Fall für die Partialbruchzerlegung. Dazu wendet man zuerst den Hinweis in Form einer Polynomdivision an, um den Nenner in einzelne Faktoren aufzuteilen:

$$\begin{aligned} (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) : (x^2 + 2) &= x^2 + 2x + 1 \\ 2x^3 + x^2 + 4x + 2 & \\ x^2 + 2 & \end{aligned}$$

Der Nenner lautet also: $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) = (x^2 + 2)(x + 1)^2$, man kann also kürzen:
$\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2} dx = \int \frac{1}{(x^2+2)(x+1)} dx$
$\frac{1}{(x^2+2)(x+1)} = \frac{A+Bx}{(x^2+2)} + \frac{C}{x+1} \implies 1 = (A + Bx)(x + 1) + C(x^2 + 2)$
Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} B + C &= 0 \\ A + B &= 0 \\ A + 2C &= 1 \end{aligned}$$

$\implies A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$
$\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2} dx = \int \frac{1}{(x^2+2)(x+1)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x^2+2} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx \overset{t=x^2}{=} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+2} + ln|x+1| \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2} ln|x^2 + 2| + ln|x + 1| \right) + c$

c) Zeigen Sie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2k-1}{2k} & f\ddot{u}r\, n\, gerade \\ \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2k}{2k+1} & f\ddot{u}r\, n\, ungerade \end{cases}$$

Hinweis: Führen Sie das Integral auf ein Integral über $sin^{n-2}(x)$ zurück ($cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$).

Lösung:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)sin^{n-1}(x)dx \overset{p.I.}{=} \underbrace{-cos(x)sin^{n-1}(x)|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)cos^2(x)sin^{n-2}(x)dx =$
$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - sin^2(x)\right) sin^{n-2}(x)dx = (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx\right)$
Jetzt formen wir die Gleichung um, addieren also $(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx$
$(1+n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx$
Induktiv wendet man dieses Verfahren an, bis nur noch 1 oder $sin(x)$ im Integral steht.
i) n gerade: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}...\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}...\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n/2}\frac{2k-1}{2k}$
ii) n ungerade: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}...\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}...\frac{2}{3}1 = \prod_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{2k}{2k+1}$

d)
$$\int \frac{ln(x^4)}{x}dx \tag{4}$$

Lösung:
Der Logarithmus lässt sich umformen ($ln(x^4) = 4ln|x|$) und dann substituieren ($t = ln|x|$, $dt = \frac{1}{x}dx$):
$\int \frac{ln(x^4)}{x}dx = 4\int \frac{ln|x|}{x}dx = 4\int tdt = 2t^2 + c = 2ln^2|x| + c$
Auch partielle Integration wäre möglich:
$\int \frac{ln(x^4)}{x}dx = 4\int \frac{ln|x|}{x}dx = 4ln|x| * ln|x| - 4\int \frac{ln|x|}{x}dx$
Umformen liefert das gleiche Ergebnis wie oben.

e)
$$\int\limits_0^3 \frac{1}{(x+2)^2(x-4)}dx \tag{5}$$

Lösung:
Hier kann man wieder die Partialbruchzerlegung anwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+2)^2(x-4)} &= \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x-4)} \\
1 &= A(x^2-2x-8) + B(x-4) + C(x^2+4x+4) = (A+C)x^2 + (-2A+B+4C)x - 8A - 4B + 4C \\
A + C &= 0 \\
-2A + B + 4C &= 0 \\
-8A - 4B + 4C &= 1
\end{aligned}$$

Das liefert: $A = -C$
$B + 6C = 0 \implies B = -6C$
$8C + 24C + 4C = 36C = 1 \implies C = \frac{1}{36}$
Also: $A = -\frac{1}{36}$, $B = -\frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{36}$

$\int_0^3 \frac{1}{(x+2)^2(x-4)}dx = \frac{1}{36}\int_0^3 \left(\frac{-1}{(x+2)} + \frac{-6}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-4)}\right)dx = \frac{1}{36}\left(\int_0^3 \frac{1}{x-4}dx - \int_0^3 \frac{1}{x+2}dx - \int_0^3 \frac{6}{(x+2)^2}dx\right) =$
$\frac{1}{36}\left(ln\left|\frac{3-4}{0-4}\right| - ln\left|\frac{3+2}{2}\right| - \int_2^5 \frac{6}{(t)^2}dt\right) = \frac{1}{36}\left(ln\frac{1}{4} - ln\frac{5}{2} + \frac{6}{t}|_2^5\right) = \frac{1}{36}\left(ln\left(\frac{1}{4} * \frac{2}{5}\right) + \frac{6}{5} - 3\right) = \frac{1}{36}\left(ln\frac{1}{10} - \frac{9}{5}\right)$
Dabei wird im 3. Integral substituiert: $t = x + 2$, $dt = dx$ und die Logarithmusrechenregeln werden benutzt.

f)
$$\int \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{(e^{2x} - e^{-2x})^3}dx \tag{6}$$

Lösung:
Hier bietet es sich an, $t = e^{2x} - e^{-2x}$, $dt = 2(e^{2x} + e^{-2x})dx$ zu substituieren:

$\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{(e^{2x}-e^{-2x})^3}dx = \int \frac{dt}{2t^3} = -\frac{1}{4t^2} + c = -\frac{1}{4(e^{2x}-e^{-2x})^2} + c$

g)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{7}$$

Hinweis: Substitution mit $x = sin(t)$

Lösung:
Wir substituieren also mit $x = sin(t)$, $dx = cos(t)dt$:
$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{sin^2(t)}{\sqrt{1-sin^2(t)}}cos(t)dt = \int \frac{sin^2(t)}{cos(t)}cos(t)dt = \int sin^2(t)dt \overset{p.I.}{=} -cos(t)sin(t) + \int cos^2 dt = -cos(t)sin(t) + \int (1 - sin^2(t))dt = -cos(t)sin(t) + t + c - \int sin^2(t)dt 2\int sin^2(t)dt = t - cos(t)sin(t) + c \implies \int sin^2(t)dt = \frac{1}{2}(t - cos(t)sin(t)) + c'$
Resubstitution:
$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}(t - cos(t)sin(t)) + c' = \frac{1}{2}(arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2}) + c'$