Aufgaben zur Integration

1 Aufgaben zur Substitution

a)

$$\int xe^{-x^2}dx$$

b)

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

(Ergebnis: $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arcsin(x) + c'$)

c)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

Hinweis: $arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2 Aufgaben zur partiellen Integration

a)

$$\int x^2e^{2x}dx$$

b)

$$\int x^ne^xdx$$

c)

$$\int x^3ln(x)dx \tag{1}$$

3 Funktionen mit besonderen Eigenschaften

Finden Sie
a) eine Funktion, die ∞ oft differenzierbar, aber nicht integrierbar ist.
b) eine Folge von Regelfunktionen $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, die punktweise gegen 0 konvergieren und deren Integral $\underset{a\to\infty}{lim} \int_0^a f_n(x) = 1$ ist.
c) eine Funktion, die nicht stetig ist, deren Ableitung jedoch stetig fortsetzbar ist.
d) eine Regelfunktion, die zwar integrierbar, aber nicht stetig ist. Das Integral soll differenzierbar sein.

4 Funktionenfolge

Sei f_n eine Folge in $R[a,b]$ mit $\underset{n\to\infty}{lim} f_n = f$.
a) Unter welcher Voraussetzung gilt $\underset{n\to\infty}{lim} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$?

Man betrachte im Folgenden die Folge:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\, x < -\frac{1}{n} \\ n(nx+1) & f\ddot{u}r\, -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ n(1-nx) & f\ddot{u}r\, 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{2}$$

b) Zeichnen Sie $f_4(x)$.

c) Berechnen Sie $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(x')dx'$. Ist $F_n(x)$ stetig (nicht F(x))?
d) Ist $F_n(x)$ differenzierbar (nicht $F(x)$)?
e) Gegen welche Funktion $F(x)$ konvergiert $F_n(x)$? Konvergiert die Folge gleichmäßig?

5 Noch mehr Rechenaufgaben

Die Aufgaben ab Aufgabenteil c) sind nur noch zusätzliche Rechenaufgaben, um die Integration zu üben, wirklich Neues kommt dort nicht mehr vor.

a)

$$\int_{-1}^{1} tan(x)e^{x^2} dx$$

b)

$$\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2} dx$$

Hinweis: (x^2+2) ist ein Faktor des Nenners.

c) Zeigen Sie:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2k-1}{2k} & f\ddot{u}r\, n\, gerade \\ \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2k}{2k+1} & f\ddot{u}r\, n\, ungerade \end{cases}$$

Hinweis: Führen Sie das Integral auf ein Integral über $sin^{n-2}(x)$ zurück ($cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$).

d)

$$\int \frac{ln(x^4)}{x} dx \tag{3}$$

e)

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{(x+2)^2(x-4)} dx \tag{4}$$

f)

$$\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{(e^{2x}-e^{-2x})^3} dx \tag{5}$$

g)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{6}$$

Hinweis: Substitution mit $x = sin(t)$