1 Aufgabe. Thema Polynome

1) Beweisen Sie: ein Polynom $f\colon C \to C$ nimmt genau dann für alle $x \in R$ reelle Werte an, wenn seine Koeffizienten reell sind.

Lösung:
Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Reelle Werte $\Leftrightarrow$ $\overline{f(z)} = f(z)$. Das ist für alle $x \in R$ gleichbedeutend mit $\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Und nach dem Identitässatz sind 2 Polynome gleich, nur wenn ihre Koeffizienten gleich sind $\Leftrightarrow$ $\overline{a_k} = a_k$. q.e.d.

2 Aufgaben zum Thema Stetigkeit

1) Zu $a, b, c \in R$ mit $a > 0$ bestimme man α, β so, dass
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \alpha x - \beta\right) = 0$

Lösung:
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \alpha x - \beta\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c-\alpha^2x^2-2\alpha x\beta-\beta^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a-\alpha^2)x^2+(b-2\alpha\beta)x+c-\beta^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta} \overset{:\frac{x}{x}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a-\alpha^2)x+(b-2\alpha\beta)+\frac{c}{x}-\frac{\beta^2}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}}$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a-\alpha^2)x+(b-2\alpha\beta)+\frac{c}{x}-\frac{\beta^2}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{a} \wedge \beta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$

2) Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat eine reelle Nullstelle.

Lösung:
Der Leitkoeffizient vom Polynom P(x) sei positiv. Dann gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Es gibt also Stellen $x_1 > 0$ und $x_2 < 0$ mit $P(x_1) > 0$ und $P(x_2) < 0$. In $[x_1, x_2]$ hat P(x) also eine Nullstelle (Zwischenwertsatz).

3) Die Funktion $f\colon [0;1] \to R$ sei stetig, und es sei $f(0) = f(1)$. Dann gibt es ein $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ mit $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$.

Lösung:
Nach der Angabe soll es gelten: $f(c+\frac{1}{2}) - f(c) = 0$. Man definiert eine Funktion $g\colon \left[0, \frac{1}{2}\right] \to R, x \mapsto f(x) - f(x+\frac{1}{2})$. Diese ist stetig (Differenz von stetigen Funktionen) mit $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -g(0)$. Da die Funktion g offensichtilch ihr Zeichen ändert gitl nach dem Zwischenwertsatz, dass sie eine Nullstelle $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Dort gilt $f(c+\frac{1}{2}) - f(c) = 0$.

4) Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$

Lösung:
$\lim\limits_{x\to 0} x\cot x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\sin x\cos x} = -\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 x-1}{\cos x(\sin x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\cos x}{(\sin x+1)}\right) = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x-e^x+1}{(e^x-1)x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-e^x}{e^x x+e^x-1}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{-e^x}{e^x x+e^x+e^x}\right) = \frac{-1}{2}$

5) Man bestimme die stetige Fortsetzung von der Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$.
Lösung:
Die Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, zwar ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$, aber die Funktion selber ist an diesem Punkt nicht definiert. Da aber $x_0 = 0$ ein Häufungspunkt von $f(x)$ ist, kann die Funktion in diesen Punkt stetig fortgesetzt werden. Es muss gelten: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(x_0)$, also ist die stetige Fortsetzung:

$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & ,x \neq 0 \\ 1 & ,x = 0 \end{cases}$

6*) Man zeige, dass $f(x) = \sqrt{|x|}$ überall stetig ist. Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung. Für den Fall $x_0 < \epsilon\sqrt{x_0}$ überlegen Sie sich, was δ ist.

Lösung:
Bestimmung von δ zu vorgegebenem $\epsilon > 0$

1.Fall: $x_0 = 0$: $|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|0|}| = |\sqrt{|x|}| \overset{!}{<} \epsilon$
$|x - 0| < \epsilon^2 = \delta$

2.Fall: $x_0 \neq 0$ Wegen $f(x) = f(-x)$ sei im Folgenden $x, x_0 > 0$
$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|x_0|}| \overset{x,x_0>0}{=} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} \overset{!}{<} \epsilon$

D.h. $|x - x_0| < \epsilon\sqrt{x_0}$ und da $x, x_0 > 0$ es gilt auch $|x - x_0| < x_0$ wenn $x_0 < \epsilon\sqrt{x_0}$ (vgl. Bild 1). Also ist $\delta = min\left\{\epsilon\sqrt{x_0}, x_0\right\}$

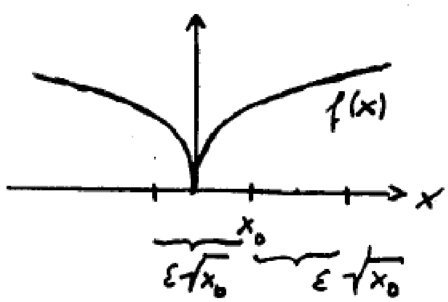

Abbildung 1: Aufgabe 1

Zusammen gilt:

$$\forall\epsilon > 0: \delta \quad := \quad \begin{cases} \epsilon^2 & x_0 = 0 \\ min\left\{\epsilon\sqrt{|x_0|}, |x_0|\right\} & x_0 \neq 0 \end{cases}$$

Dann gilt die Behauptung.

7*) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$
a) Für $x_0 \neq 1$ ermittle man $\delta(\epsilon, x_0)$, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
b) Man berechne $\delta(\epsilon, x_0)$ für $\epsilon = 0,01$ und $x_0 = 2, x_0 = 1,1, x_0 = 0,999$.

Hinweis: Für die Abschätzung $|f(x) - f(x_0)|$ benutzen Sie folgende Identität: $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$. Leiten Sie mit dieser Abschätzung den Wert von δ ab.

Lösung:
a) Bestimmung von $\delta(\epsilon, x_0)$ zu vorgegebenem $\epsilon > 0$

$|f(x) - f(x_0)| = |\frac{x}{x-1} - \frac{x_0}{x_0-1}| = |\frac{x(x_0-1)-x_0(x-1)}{(x-1)(x_0-1)}| = |\frac{x_0-x}{(x-1)(x_0-1)}| = \frac{|x_0-x|}{|x-1||x_0-1|} = \frac{|x_0-x|}{|(x-x_0)+(x_0-1)||x_0-1|} \overset{|x-x_0|\neq|x_0-1|}{\leq} \frac{|x_0-x|}{||x-x_0|-|x_0-1|||x_0-1|} = \frac{|x_0-x|}{(|x_0-1|-|x-x_0|)|x_0-1|} \overset{!}{<} \epsilon$

Es wurde folgende Identität benutzt $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$, also wenn $|a| \neq |b|$: $\frac{1}{|a+b|} \leq \frac{1}{||a|-|b||}$ um im Nenner den Ausdruck $|x - x_0|$ statt $(x - x_0)$ zu bekommen. Den braucht man für die Abschätzung von $|x - x_0|$. Die Ungleichung wird dann umgeformt:

$\Rightarrow |x_0 - x| < \epsilon|x_0 - 1|^2 - \epsilon|x - x_0||x_0 - 1| \overset{|x-x_0|=|x_0-x|}{\Leftrightarrow} |x - x_0| < \epsilon|x_0 - 1|^2 - \epsilon|x - x_0||x_0 - 1| \Leftrightarrow |x - x_0|(1 + \epsilon|x_0 - 1|) < \epsilon|x_0 - 1|^2 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon|x_0-1|^2}{1+\epsilon|x_0-1|}$

Also $\delta(\epsilon, x_0) = \frac{\epsilon|x_0-1|^2}{1+\epsilon|x_0-1|}$

Formalismus zum Nachweis der Stetigkeit:
Zu $x_0 \neq 1$ und $\epsilon > 0$ sei $\delta(\epsilon, x_0) = \frac{\epsilon|x_0-1|^2}{1+\epsilon|x_0-1|}$. $\forall x \in R$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$|f(x)-f(x_0)| = \frac{|x_0-x|}{|(x-x_0)+(x_0-1)||x_0-1|} \leq \frac{|x_0-x|}{(|x_0-1|-|x-x_0|)|x_0-1|} < \frac{\delta}{(|x_0-1|-\delta)|x_0-1|} = \frac{\frac{\epsilon|x_0-1|^2}{1+\epsilon|x_0-1|}}{(|x_0-1|-\frac{\epsilon|x_0-1|^2}{1+\epsilon|x_0-1|})|x_0-1|} = \frac{\frac{\epsilon|x_0-1|^2}{1+\epsilon|x_0-1|}}{(|x_0-1|^2-\frac{\epsilon|x_0-1|^3}{1+\epsilon|x_0-1|})} = \frac{\frac{\epsilon|x_0-1|^2}{1+\epsilon|x_0-1|}}{(\frac{|x_0-1|^2-\epsilon|x_0-1|^3+\epsilon|x_0-1|^3}{1+\epsilon|x_0-1|})} = \epsilon$

b)

$\epsilon = 0,01$	$x_0 = 2$	$x_0 = 1,1$	$x_0 = 0,999$
$\delta(\epsilon, x_0) = \frac{\epsilon\|x_0-1\|^2}{1+\epsilon\|x_0-1\|}$	$9,9 \cdot 10^{-3}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$9,99 \cdot 10^{-9}$

3 Aufgaben zum Thema Differenzierbarkeit

1) Man berechne die Ableitung nach x von:
   a) $f(x) = e^{ax}\sin(\omega x + a)$,
   b) $f(x) = \cos(\sin(\cos(x^2)))$.

Lösung:
a) $f'(x) = [e^{ax}\sin(\omega x + a)]' = ae^{ax}\sin(\omega x + a) + \omega e^{ax}\cos(\omega x + a) = e^{ax}(a\sin(\omega x + a) + \omega\cos(\omega x + a))$

b) $f'(x) = \left[\cos(\sin(\cos(x^2)))\right]' = 2x \cdot (-\sin(x^2)) \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(\sin(\cos(x^2)))) = 2x \cdot \sin(x^2) \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot \sin(\sin(\cos(x^2)))$

2) Man berechne die Ableitung nach x, dort wo die Funktion differenzierbar ist:
   a) $f(x) = |x|$
   b) $f(x) = x\sqrt{|x|}$.

Lösung:
a) $f(x) = |x|$
Für den Fall $x > 0$ ist $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
Für den Fall $x < 0$ ist $f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$
Wenn $x = 0 = x_0$ und $h \neq 0$ $f'(x_0) = \underset{h\to 0}{lim}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \underset{h\to 0}{lim}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0}{lim}\frac{|h|}{h}$
Dieser Grenzwert existiert nicht, weil $\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h > 0 \\ -1 & \text{für } h < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = x\sqrt{|x|}$
Für den Fall $x > 0$ ist also $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
Für den Fall $x < 0$ ist $f(x) = x\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = (x \cdot (-x)^{\frac{1}{2}})' = (-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x \cdot (-x)^{-\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-x) \cdot (-x)^{-\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}$
Für den Fall $x = 0$ und $h \neq 0$ $f'(x_0) = \underset{h\to 0}{lim}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \underset{h\to 0}{lim}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0}{lim}\frac{h\sqrt{|h|}}{h} = \underset{h\to 0}{lim}\sqrt{|h|} = 0$

3) Für welche $a \in R_+$ ist die Funktion $f\colon R \to R$ mit $f(x)\colon = |x|^a sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0)\colon = 0$ im Nullpunkt differenzierbar? Gegebenfalls berechne man die Ableitung.

Lösung:
$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|^a sin\frac{1}{x}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|^a}{x}sin\frac{1}{x}$
Es gilt $-1 \leq sin\frac{1}{x} \leq 1$ und damit ist die obere Grenze nur dann definiert wenn a>1 $\Rightarrow f'(0) = 0$.

4) Klausuraufgabe. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4|x-1|^3 + |x|^3, -\infty < x < \infty$.
   a) Man zeige: $f(x) > 0$ für alle x. Welchen Wert strebt $f(x)$ zu, falls $x \to \pm\infty$?

   b) Man berechne $f'(x)$

   c) Man zeige: $f''(x) = \begin{cases} -30x + 24 & , x \leq 0 \\ -18x + 24 & , 0 < x \leq 1 \\ 30x - 24 & , x > 1 \end{cases}$

   d) Man zeige, dass $f(x)$ für alle x zweimal differenzierbar ist.

Lösung:
Die gegebene Funktion ist stetig als Summe stetiger Funktionen.
a)
$$\begin{cases} |x-1|^3 \geq 0, & |x-1|^3 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \Leftrightarrow & |x-1|^3 = 0 \wedge |x|^3 = 0 \Rightarrow \text{Widerspruch} \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} (4|x-1|^3 + |x|^3) = +\infty$$

b)
$x < 0 : f(x) = -4(x-1)^3 - x^3, f'(x) = -12(x-1)^2 - 3x^2$ stetig
$0 < x < 1 : f(x) = -4(x-1)^3 + x^3, f'(x) = -12(x-1)^2 + 3x^2$ stetig
$x > 1 : f(x) = 4(x-1)^3 + x^3, f'(x) = 12(x-1)^2 + 3x^2$ stetig

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -12 = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \\ \lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) \\ f'(x) \text{ stetig auf } R\backslash\{0,1\}, f(x) \text{ stetig auf } R \end{cases} \Rightarrow f'(x) \text{ stetig auf } R$$

c) $x < 0 : f''(x) = -24(x-1) - 6x = -30 + 24$ stetig
$0 < x < 1 : f''(x) = -24(x-1) + 6x = -18x + 24$ stetig
$x > 1 : f''(x) = 24(x-1) + 6x = 30x - 24$ stetig

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f''(x) = 24 = \lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) \\ \lim\limits_{x\to 1-} f''(x) = 6 = \lim\limits_{x\to 1^+} f''(x) \\ f''(x) \text{ stetig auf } R\backslash\{0,1\}, f'(x) \text{ stetig auf } R \end{cases} \Rightarrow f''(x) \text{ stetig auf } R$$

d) Aus a), b), c) folgt $f(x)$ ist für alle x zweimal differenzierbar.